

La Relativité générale aujourd’hui

Thibault DAMOUR
Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette, France

1 Introduction

La *théorie de la relativité générale* a été conçue par Einstein dans un travail qui s’est étendu sur les années 1907-1915. Le point de départ de la réflexion d’Einstein a été la rédaction, en 1907, d’un article de revue sur ce qu’on appelle aujourd’hui la *théorie de la relativité restreinte*. Rappelons que cette dernière était issue d’une nouvelle cinématique des mesures de longueur et de durée proposée par Einstein en juin 1905 [1], [2], après d’importants travaux pionniers de Lorentz et de Poincaré. La théorie de la relativité restreinte consiste essentiellement à poser un nouveau cadre fondamental (à la place de celui posé par Galilée, Descartes et Newton) pour la formulation des lois physiques : ce cadre étant la structure chrono-géométrique de l’espace-temps de Poincaré-Minkowski. Une tâche naturelle après 1905 semblait donc être de formuler, reformuler ou modifier les lois physiques alors connues pour qu’elles s’accordent avec le cadre de la relativité restreinte. Cette tâche avait été initiée (avant même la cristallisation conceptuelle apportée par Einstein en 1905) pour la loi newtonienne de la gravitation par Lorentz (1900) et Poincaré (1905), et fut poursuivie dans les années 1910-1915 par Max Abraham, Gunnar Nordström et Gustav Mie (ces derniers développant des théories relativistes *scalaires* de la gravitation).

Pendant, en 1907, Einstein s’est rendu compte que l’interaction gravitationnelle possédait des caractères particuliers qui lui ont suggéré la nécessité de *généraliser* le cadre et les structures de la théorie de la relativité de 1905. Après de nombreuses années d’un effort intellectuel intense, Einstein a réussi à construire une *théorie de la relativité généralisée* (ou “relativité générale”) qui proposait une modification profonde de la structure chrono-géométrique de l’espace-temps de la relativité restreinte. De simple arène neutre, donnée *a priori*, indépendamment de tout contenu matériel, et servant de cadre à l’existence et à l’évolution de la matière, l’espace-temps est devenu, en 1915, un “champ” physique (identifié au champ gravitationnel), c’est-à-dire une entité dynamique influencée par et influençant la distribution de matière-énergie qu’il contient.

Cette conception radicalement nouvelle de la structure de l’espace-temps est longtemps restée en marge du développement de la physique. La physique du vingtième siècle a découvert un grand nombre de lois et de phénomènes physiques nouveaux en posant comme cadre fondamental l’espace-temps de la relativité restreinte, et en imposant le respect de ses symétries (groupe de Lorentz-Poincaré). En revanche, la théorie de la relativité générale est apparue longtemps à la fois comme une théorie mal confirmée par l’expérience, et sans contact avec les progrès extraordinaires issus de l’application de la théorie quantique (et de la relativité restreinte) à la physique des hautes énergies. Cette situation de marginalisation de la relativité générale n’est plus du tout d’actualité. Aujourd’hui la relativité générale est devenue l’un des acteurs essentiels de la science de pointe. De nombreux tests expérimentaux de haute précision ont confirmé, dans le détail, la pertinence de cette théorie. La relativité générale est devenue un outil privilégié de description de l’univers macroscopique, depuis le big bang jusqu’aux trous noirs, en passant par le système solaire, les étoiles à neutrons,

les pulsars et les ondes gravitationnelles. De plus, la recherche d’une cohérence de toute la physique fondamentale a suggéré l’exploration de théories unifiant, dans un cadre quantique général, la description de la matière et de toutes ses interactions (y compris l’interaction gravitationnelle). Ces théories, encore en construction, et provisoirement appelées théories des cordes, contiennent de façon centrale la relativité générale, mais suggèrent que la structure fondamentale de l’espace-temps-matière est encore plus riche que ce que suggèrent séparément la théorie quantique et la relativité générale.

2 Relativité restreinte

Commençons notre exposition de la théorie de la relativité générale par des rappels sur la structure chrono-géométrique de l’espace-temps de la théorie de la relativité *restreinte*. La structure de l’espace-temps de Poincaré-Minkowski est donnée par une généralisation de la structure géométrique euclidienne de l’espace ordinaire. Cette dernière est résumée par la formule $L^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ (conséquence du théorème de Pythagore), exprimant le carré de la distance L entre deux points de l’espace en fonction de la somme des carrés des différences des coordonnées (orthonormales) x, y, z repérant les deux points. Le groupe de symétrie de la géométrie euclidienne est le groupe des transformations des coordonnées $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ laissant invariante la forme $L^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. [Ce groupe est engendré par les translations, les rotations et les “retournements”, comme par exemple la transformation dans un miroir : $x' = -x, y' = y, z' = z$.]

L’espace-temps de Poincaré-Minkowski est défini comme l’ensemble des *événements* (idéalisations de ce qui se passe en un point particulier de l’espace, à un moment particulier du temps), muni de la notion d’*intervalle* (carré) S^2 entre deux événements. Un événement est repéré par quatre coordonnées, x, y, z, t , où (x, y, z) sont les coordonnées spatiales du point de l’espace “où se passe” l’événement en question, et où t repère l’instant “quand se passe” cet événement. Un autre événement sera repéré (dans le même référentiel) par quatre coordonnées différentes, disons $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t$. Les points de l’espace où se passent ces deux événements sont séparés d’une distance L donnée par la formule ci-dessus, $L^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. Les moments du temps “quand se passent” ces deux événements sont séparés d’une durée T donnée par $T = \Delta t$. En fonction de ces quantités, l’intervalle carré S^2 entre les deux événements est donné, par définition, par la généralisation suivante du théorème de Pythagore :

$$S^2 = L^2 - c^2 T^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 (\Delta t)^2, \quad (1)$$

où c désigne la vitesse de la lumière (ou plus exactement la vitesse maximale de propagation des signaux).

La formule (1) définit la *chrono-géométrie* de l’espace-temps de Poincaré-Minkowski. Le groupe de symétrie de cette chrono-géométrie est le groupe des transformations des coordonnées $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$ laissant invariante la forme (1) de l’intervalle S . On démontre que ce groupe est constitué de transformations linéaires et qu’il est engendré par les translations d’espace et de temps, les rotations spatiales, les “boutées”¹ (c’est-à-dire les transformations de Lorentz spéciales), et les retournements d’espace et de temps.

Il est commode de remplacer la coordonnée temporelle t par le “temps-lumière” $x^0 \equiv ct$, et de noter collectivement $x^\mu \equiv (x^0, x^i)$ où les indices grecs $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$, et les indices latins $i, j, \dots = 1, 2, 3$ (avec $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$). La formule (1) s’écrit alors

$$S^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu, \quad (2)$$

¹Vieux mot français, du verbe “bouter”, et correspondant à l’anglais “boosts”.

où l'on a utilisé la convention de sommation d'Einstein², et où $\eta_{\mu\nu}$ est une matrice diagonale dont les seuls éléments non nuls sont $\eta_{00} = -1$ et $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1$. Le groupe de symétrie de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski est alors l'ensemble des transformations de Lorentz-Poincaré,

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (3)$$

où $\eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} = \eta_{\mu\nu}$.

La chrono-géométrie de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski peut être visualisée en représentant, autour de chaque point x de l'espace-temps, le lieu des points qui sont séparés du point x par un intervalle (carré) unité, c'est-à-dire l'ensemble des points x' tels que $S_{xx'}^2 = \eta_{\mu\nu}(x'^{\mu} - x^{\mu})(x'^{\nu} - x^{\nu}) = +1$. Ce lieu est un hyperboloïde (unité) à une nappe.

Si l'on était dans un espace euclidien habituel, l'ensemble des points x' tracerait une sphère (unité) centrée sur x , et le "champ" de ces sphères centrées en chaque point x permettrait de caractériser complètement la géométrie euclidienne de l'espace. De même, dans le cas de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski, le "champ" des hyperboloïdes unités centrés en chaque point x est une caractérisation visuelle de la géométrie de cet espace-temps. Voir Fig. 1. Cette figure donne une idée du groupe de symétrie de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski, et rend en particulier clair le caractère rigide et homogène de sa géométrie.

L'idée essentielle de l'article d'Einstein de juin 1905 était d'imposer le groupe de transformations (3) comme groupe de symétrie des lois fondamentales de la physique ("principe de relativité"). Ce point de vue s'est révélé être extraordinairement fructueux, car il a conduit à la découverte de nouvelles lois et à la prédiction de nouveaux phénomènes. Citons seulement pour mémoire : la dynamique relativiste des particules classiques, la dilatation du temps de vie des particules relativistes, la relation $E = mc^2$ entre énergie et masse inertielle, la théorie relativiste des particules quantiques de spin $\frac{1}{2}$ de Dirac, la prédiction de l'antimatière, la classification des particules par la masse au repos et le spin, la relation entre spin et statistique, le théorème CPT.

Après ces rappels sur la relativité restreinte, indiquons ce qui suggéra à Einstein, en 1907, la nécessité de généraliser d'une façon profonde la structure chrono-géométrique de l'espace-temps.

3 Principe d'équivalence

Le point de départ d'Einstein est un fait expérimental remarquable : tous les corps tombent, dans un champ gravitationnel extérieur, avec la même accélération. Ce fait avait été indiqué par Galilée en 1638. Par une combinaison remarquable de raisonnements logiques, d'expériences de pensée et d'expériences réelles faites sur des plans inclinés³, Galilée fut en effet le premier à concevoir ce qu'on appelle aujourd'hui "universalité de la chute libre", ou "principe d'équivalence faible". Citons la conclusion que Galilée tire d'un raisonnement où il fait varier le rapport entre la densité des corps en chute libre considérés et la résistance du milieu dans lequel ils tombent : "c'est alors, considérant ces faits qu'il me vint à l'esprit que si l'on supprimait totalement la résistance du milieu, tous les corps descendraient avec la même vitesse" [3]. Cette universalité de la chute libre fut vérifiée avec plus de précision par des expériences de Newton sur des pendules, et fut incorporée par lui dans sa théorie de la gravitation (1687) sous la forme d'une identification entre masse inertielle m_i (apparaissant dans la loi fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$) et masse gravitationnelle m_g (apparaissant dans la force gravitationnelle, $F_g = G m_g m'_g / r^2$) :

$$m_i = m_g . \quad (4)$$

²Tout indice répété est supposé être sommé sur toutes ses valeurs possibles.

³L'expérience de chute de corps supposée faite depuis le haut de la tour de Pise est un mythe, même s'il résume bien l'essentiel de l'innovation galiléenne

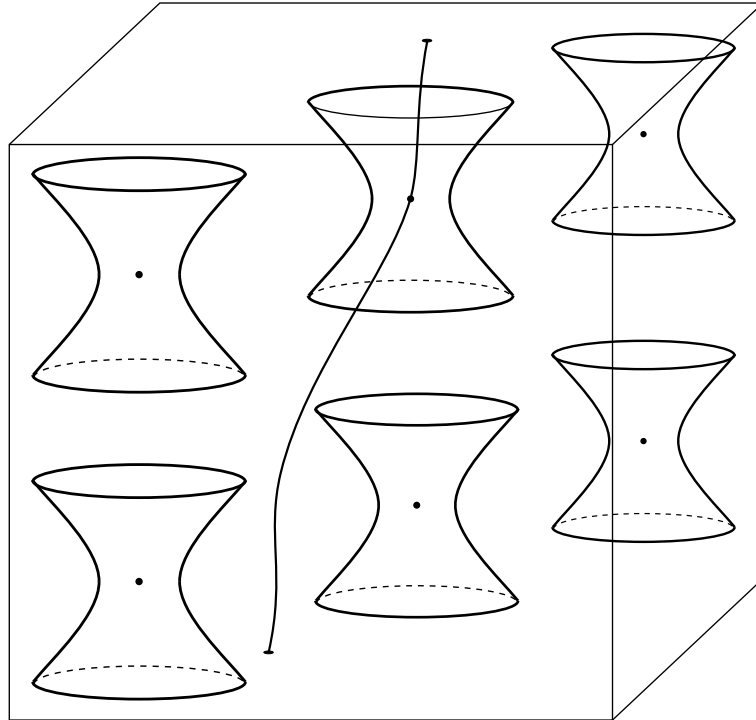


FIG. 1 – Géométrie de l’espace-temps “rigide” de la théorie de la relativité restreinte. Cette géométrie est visualisée en représentant, autour de chaque point x de l’espace-temps, le lieu des points séparés du point x par un intervalle (carré) unité. L’espace-temps représenté ici n’a que trois dimensions : une dimension temporelle (représentée verticalement), $x^0 = ct$, et deux dimensions spatiales (représentées horizontalement), x, y . On a aussi visualisé la ligne d’espace-temps (allant de bas en haut du “bloc espace-temps”, c’est à dire du passé vers le futur) représentant l’histoire du mouvement d’une particule.

A la fin du 19^{ième} siècle, le baron Roland von Eötvös vérifia l’équivalence (4) entre m_i et m_g avec une précision de l’ordre de 10^{-9} , et Einstein était au courant de cette vérification de haute précision. [A l’heure actuelle, l’équivalence entre m_i et m_g est vérifiée au niveau 10^{-12} [4].] Le point qui frappa Einstein fut que, vu la précision avec laquelle $m_i = m_g$ était vérifiée, et vu l’équivalence entre masse inertielle et énergie découverte par Einstein en septembre 1905 [2] ($E = m_i c^2$), il fallait conclure que toutes les formes très diverses d’énergie contribuant à la masse d’un corps (masse au repos des constituants élémentaires, énergies de liaison variées, énergie cinétique interne, ...) contribuaient de façon strictement identique à la masse gravitationnelle de ce corps, c’est-à-dire à la fois à sa capacité à réagir à un champ gravitationnel extérieur, et à sa capacité à créer un champ gravitationnel.

En 1907, Einstein réalisa que l’équivalence entre m_i et m_g contenait implicitement une équivalence plus profonde entre inertie et gravitation ayant des conséquences importantes pour la notion de référentiel inertiel (lequel était un concept fondamental de la théorie de la relativité restreinte). Dans une expérience de pensée novatrice, Einstein imagina le comportement de solides et d’horloges de référence dans un ascenseur en chute libre. A cause de l’universalité de la chute libre, dans un tel “référentiel local en chute libre” tous les corps présents dans ce référentiel apparaîtront comme non accélérés par rapport à lui. Donc, par rapport à un tel repère, le champ gravitationnel extérieur est “effacé”. Einstein postula alors ce qu’il appela le “principe

d'équivalence" entre gravitation et inertie. Ce principe a deux volets, qu'Einstein utilisa tour à tour. Le premier volet dit que, pour n'importe quel champ gravitationnel extérieur, il est possible d'"effacer" localement le champ de gravitation en utilisant un référentiel local en chute libre adéquat, et que, du coup, les lois de la physique non gravitationnelle s'appliquent dans ce référentiel local, comme elles le faisaient, dans un référentiel inertiel (libre de gravitation) en relativité restreinte. Le deuxième volet du principe d'équivalence d'Einstein dit que, en partant d'un référentiel inertiel en relativité restreinte (et en l'absence de tout "vrai" champ de gravitation), on peut créer un champ gravitationnel apparent dans un référentiel local, si ce référentiel est accéléré (soit en ligne droite, soit par une rotation).

4 Gravitation et chrono-géométrie de l'espace-temps

Einstein sut (par un extraordinaire chemin intellectuel qui dura huit ans) construire une nouvelle théorie de la gravitation, basée sur une ample généralisation de la théorie de la relativité de 1905, en partant seulement du principe d'équivalence énoncé ci-dessus. La première étape de ce processus a consisté à comprendre que le principe d'équivalence suggérait une modification profonde de la structure chrono-géométrique de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski rappelé dans l'équation (1) ci-dessus. En effet, soit X^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$, les coordonnées d'espace-temps dans un référentiel local en chute libre (ou *référentiel localement inertiel*). Dans un tel référentiel, les lois de la relativité restreinte s'appliquent. En particulier, l'intervalle infinitésimal d'espace-temps $ds^2 = dL^2 - c^2 dT^2$ entre deux événements infiniment voisins d'un tel référentiel X^α , $X'^\alpha = X^\alpha + dX^\alpha$ (proches du centre de ce référentiel) prend la forme

$$ds^2 = dL^2 - c^2 dT^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta, \quad (5)$$

où l'on rappelle que les indices répétés α et β sont sommés sur toutes leurs valeurs ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$). On sait aussi qu'en relativité restreinte les densités et flux locaux d'énergie et d'impulsion se rassemblent dans les dix composantes du *tenseur d'énergie-impulsion* $T^{\alpha\beta}$. [Par exemple, la densité volumique d'énergie est égale, dans le référentiel $X^\alpha = (X^0, X^i)$, $i = 1, 2, 3$ à T^{00} .] La conservation de l'énergie et de l'impulsion se traduit par l'équation $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, où $\partial_\beta = \partial/\partial X^\beta$.

La théorie de la relativité restreinte nous dit que l'on peut changer de référentiel localement inertiel (tout en restant dans le voisinage d'un point d'espace-temps où l'on a "effacé" la gravitation) par une transformation de Lorentz, $X'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta X^\beta$. Sous une telle transformation, l'intervalle infinitésimal ds^2 , Eq. (5), reste invariant, et les 10 composantes du tenseur (symétrique) $T^{\alpha\beta}$ se transforment selon $T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta}$. En revanche, quand on passe d'un référentiel *localement* inertiel (de coordonnées X^α) à un référentiel non inertiel *étendu* (de coordonnées x^μ ; $\mu = 0, 1, 2, 3$) la transformation reliant les X^α aux x^μ n'est plus une transformation *linéaire* (comme la transformation de Lorentz) mais devient une transformation *non linéaire* $X^\alpha = X^\alpha(x^\mu)$ d'une forme qui pourra être quelconque. Du coup, la valeur de l'intervalle infinitésimal ds^2 va prendre, quand on l'exprime dans un référentiel étendu général, une forme plus compliquée que la forme très simple, Eq. (5), qu'elle avait dans un référentiel localement en chute libre. En effet, en différentiant les fonctions non linéaires $X^\alpha = X^\alpha(x^\mu)$ on obtient le lien $dX^\alpha = \partial X^\alpha/\partial x^\mu dx^\mu$. En remplaçant cette relation dans (5) on obtient ensuite

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu, \quad (6)$$

où les indices μ, ν sont sommés sur 0, 1, 2, 3 et où les dix fonctions $g_{\mu\nu}(x)$ (symétriques sur les indices μ et ν) des quatre variables x^λ sont définies, point par point (c'est-à-dire en considérant pour chaque point x^λ un référentiel localement en chute libre au point x , de coordonnées locales X^α_x) par $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \partial X^\alpha_x(x)/\partial x^\mu \partial X^\beta_x(x)/\partial x^\nu$.

A cause de la non linéarité des fonctions $X^\alpha(x)$, les fonctions $g_{\mu\nu}(x)$ dépendent en général de façon non triviale des coordonnées de x .

La chrono-géométrie locale de l'espace-temps apparaît ainsi comme donnée non pas par la métrique minkowskienne simple (2), avec des coefficients constants $\eta_{\mu\nu}$, mais par une métrique quadratique d'un type beaucoup plus général, Eq. (6), avec des coefficients $g_{\mu\nu}(x)$ variables de point en point. De tels espaces métriques généraux ont été introduits et étudiés par Gauss et Riemann au 19^{ième} siècle (dans le cas où la forme quadratique (6) est définie positive). Ils portent le nom d'*espaces riemanniens* ou d'*espaces courbes*. [Dans le cas, d'intérêt pour la théorie d'Einstein, où la forme quadratique (6) n'est pas définie positive, on parle de métrique pseudo-riemannienne.]

Nous n'avons pas la place ici d'expliquer en détail les diverses structures géométriques induites, dans un espace riemannien, par la donnée de l'intervalle infinitésimal (6). Indiquons seulement que la donnée, Eq. (6), de la distance ds entre deux points infiniment voisins permet, par intégration le long d'une ligne, de définir la longueur d'une ligne quelconque joignant deux points éloignés, A et B : $L_{AB} = \int_A^B ds$. On peut alors définir la "ligne la plus droite possible" entre deux points donnés A et B comme la ligne la plus courte, c'est-à-dire celle qui minimise (ou, en général, extrémise) la distance intégrée L_{AB} . Ces lignes les plus droites possibles s'appellent *lignes géodésiques*. Pour donner un exemple simple, les géodésiques d'une surface sphérique (comme la surface de la Terre) sont les grands cercles (de rayon égal au rayon de la sphère). Si l'on écrit mathématiquement les conditions pour qu'une ligne, donnée par sa représentation paramétrique $x^\mu = x^\mu(s)$ où s est la longueur le long de la ligne, extrémise la longueur totale L_{AB} on trouve que $x^\mu(s)$ doit satisfaire l'équation différentielle du second ordre suivante

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (7)$$

où les quantités $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, appelés *coefficients de Christoffel* ou *coefficients de connexion*, sont calculés, en chaque point x , à partir des *composantes de la métrique* $g_{\mu\nu}(x)$ selon

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (8)$$

où $g^{\mu\nu}$ désigne la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$ ($g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$ où le symbole de Kronecker δ_ν^μ vaut 1 quand $\mu = \nu$ et 0 sinon) et où $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ désigne la dérivée partielle par rapport à la coordonnée x^μ . Pour donner un exemple très simple : dans l'espace-temps de Poincaré-Minkowski les composantes de la métrique sont des constantes $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (quand on utilise un référentiel inertiel). Du coup, les coefficients de connexion (8) sont nuls dans un référentiel inertiel, et l'équation différentielle des géodésiques se réduit à $d^2 x^\lambda/ds^2 = 0$ dont les solutions sont des lignes droites ordinaires : $x^\lambda(s) = a^\lambda s + b^\lambda$. En revanche, dans un espace-temps "courbe" général (c'est-à-dire avec des $g_{\mu\nu}$ qui dépendent de façon arbitraire du point x) les géodésiques ne pourront pas être *globalement* représentées par des lignes droites. On montre cependant qu'il reste toujours possible, pour des $g_{\mu\nu}(x)$ quelconques, de changer de coordonnées $x^\mu \rightarrow X^\alpha(x)$ de telle sorte que les coefficients de connexion $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, dans le nouveau système X^α de coordonnées, s'annulent *localement*, en un point donné X_0^α (ou même le long d'une ligne quelconque). De tels systèmes de coordonnées *localement géodésiques* réalisent mathématiquement le principe d'équivalence d'Einstein : à des termes du deuxième ordre près, les composantes $g_{\alpha\beta}(X)$ d'une métrique "courbe" dans des coordonnées localement géodésiques X^α ($ds^2 = g_{\alpha\beta}(X) dX^\alpha dX^\beta$) peuvent être identifiées aux composantes d'une métrique "plate" de Poincaré-Minkowski : $g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}((X - X_0)^2)$, où X_0 est le point autour duquel on développe.

5 Equations d'Einstein : l'espace-temps élastique

Ayant postulé qu'une théorie relativiste cohérente du champ gravitationnel devait inclure la considération d'une vaste généralisation de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski, Eq. (6), Einstein en conclut que les dix mêmes fonctions $g_{\mu\nu}(x)$ devaient décrire à la fois la géométrie de l'espace-temps et la gravitation. Il s'attela alors à la tâche de trouver quelles équations devaient satisfaire le "champ géométrico-gravitationnel" $g_{\mu\nu}(x)$. Trois principes le guidèrent dans cette recherche. Le premier est le *principe de relativité générale* qui affirme qu'en présence d'un champ gravitationnel les lois fondamentales de la physique (y compris celles du champ gravitationnel lui-même) doivent pouvoir s'écrire de la même façon dans n'importe quel système de coordonnées. Le deuxième est que la "source" du champ gravitationnel doit être le tenseur d'énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$. Le troisième est un principe de *correspondance* avec la physique antérieure : dans la limite où l'on néglige les effets gravitationnels $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ doit être une solution des équations recherchées, et il doit aussi exister une limite (dite *Newtonienne*) où la nouvelle théorie se réduit à la théorie de la gravitation de Newton.

Notons que le principe de relativité générale a (contrairement aux apparences et contrairement à ce qu'Einstein crut pendant quelques années) un statut physique différent du principe de relativité restreinte. Le principe de relativité restreinte était un principe de symétrie de la structure de l'espace-temps qui affirmait que la physique était *la même* dans une classe particulière de référentiels, et donc que certains phénomènes "correspondants" se déroulaient exactement de la même façon dans des référentiels différents (transformations "actives"). En revanche, le principe de relativité générale est un *principe d'indifférence* : les phénomènes ne se déroulent (en général) pas de la même façon dans des systèmes de coordonnées différents, mais aucun des systèmes (étendus) de coordonnées n'a de statut privilégié par rapport aux autres.

Le principe affirmant que le tenseur d'impulsion-énergie $T^{\mu\nu}$ doit être la source du champ gravitationnel est fondé sur deux idées : les relations $E = m_i c^2$ et le principe d'équivalence faible $m_i = m_g$ montrent que, dans la limite newtonienne, la source de la gravitation, la masse gravitationnelle m_g , est égale, au facteur c^{-2} près, à l'énergie totale du corps considéré c'est-à-dire à l'intégrale sur l'espace de la densité d'énergie T^{00} . Donc au moins une des composantes du tenseur $T^{\mu\nu}$ doit jouer le rôle de source pour le champ gravitationnel. Mais comme ce dernier est décrit, d'après Einstein, par les dix composantes de la métrique $g_{\mu\nu}$, il est naturel de supposer que la source de $g_{\mu\nu}$ doit aussi avoir dix composantes, ce qui est justement le cas du tenseur (symétrique) $T^{\mu\nu}$.

Après de longues années d'un travail conceptuel ardu, Einstein écrivit, en novembre 1915 [5, 2], la forme finale de la théorie de la relativité générale [6].

Les "équations d'Einstein" sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires du second ordre pour le champ géométrico-gravitationnel $g_{\mu\nu}$, contenant le tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} T^{\kappa\lambda}$ au second membre. Elles s'écrivent comme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (9)$$

où G est la constante (newtonienne) de la gravitation, c la vitesse de la lumière, et $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ où le *tenseur de Ricci* $R_{\mu\nu}$ se calcule en fonction des coefficients de connexion $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ (8) de la façon suivante

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta. \quad (10)$$

On démontre que les trois principes que nous avons énoncés ci-dessus déterminent uniquement, dans un espace-temps à quatre dimensions, les équations d'Einstein

(9). Il est d'ailleurs remarquable que ces équations puissent aussi être élaborées à partir de points de vue complètement différents de celui pris par Einstein. Par exemple, dans les années 60 divers auteurs (notamment Feynman, Weinberg et Deser ; voir références dans [4]) montrèrent que les équations d'Einstein pouvaient être obtenues par une approche purement "dynamique", fondée sur la cohérence des interactions d'un champ de spin 2 à longue portée, sans faire appel, comme le fit Einstein, aux notions "géométriques" issues des travaux mathématiques sur les espaces riemanniens. Signalons aussi que si l'on relâche une partie des principes énoncés ci-dessus (comme le fit Einstein en 1917) on peut aboutir à une généralisation des équations (9) dans laquelle on rajoute au membre de gauche le terme $+\Lambda g_{\mu\nu}$ où Λ est une constante appelée *constante cosmologique*. Une telle modification avait été proposée par Einstein en 1917 pour pouvoir écrire une solution cosmologique globalement homogène et *stationnaire*. Einstein rejeta ce terme après les travaux de Friedmann (1922) montrant l'existence de solutions cosmologiques *en expansion* de la relativité générale et après la découverte observationnelle (par Hubble, 1929) du mouvement d'expansion de l'ensemble des galaxies. Cependant les données cosmologiques récentes ont remis au goût du jour cette possibilité, même si la physique fondamentale d'aujourd'hui tend à considérer qu'un terme du type $\Lambda g_{\mu\nu}$ doit être considéré comme une contribution physique particulière au membre de droite des équations d'Einstein (plus précisément comme le tenseur d'énergie-impulsion du "vide", $T_{\mu\nu}^V = -\frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu}$), plutôt que comme une modification géométrique universelle du membre de gauche.

Commentons le sens physique des équations d'Einstein (9). L'idée nouvelle essentielle est que la structure chrono-géométrique de l'espace-temps, Eq. (6), c'est-à-dire la structure qui sous-tend toutes les mesures que l'on peut faire localement de durées, dT , et de distance, dL , (rappelons que, localement, $ds^2 = dL^2 - c^2 dT^2$) n'est plus une structure rigide, donnée a priori, une fois pour toutes (comme l'était la structure de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski), mais est devenue un *champ*, c'est-à-dire une structure dynamique, ou *élastique*, qui est créée et/ou déformée par la présence d'une distribution d'énergie-impulsion. Voir la Fig. 2 qui visualise la géométrie "élastique" de l'espace-temps de la théorie de la relativité générale en représentant, autour de chaque point x , le lieu des points (supposés être infiniment proches de x) séparés de x par un intervalle (carré) constant : $ds^2 = \varepsilon^2$. Comme dans le cas de l'espace-temps de Poincaré-Minkowski (Fig. 1), on obtient ainsi un "champ" d'hyperboloïdes, mais maintenant ce champ d'hyperboloïdes n'a plus une structure "rigide" et homogène.

Le *champ espace-temps* $g_{\mu\nu}(x)$ décrit à la fois la variabilité de point en point de la chrono-géométrie et tous les effets gravitationnels. L'exemple le plus simple d'*élasticité* de la chrono-géométrie de l'espace-temps est l'effet de la proximité d'une masse sur la "vitesse d'écoulement local du temps". En termes concrets, si vous séparez deux jumeaux à la naissance, l'un restant à la surface de la Terre et l'autre allant vivre au sommet d'une très haute montagne (c'est-à-dire plus loin du centre de la Terre), et si vous les réunissez après 100 ans, le jumeau "montagnard" sera plus vieux (aura vécu plus longtemps) que le jumeau resté sur le plancher des vaches. Tout se passe comme si le temps s'écoulait d'autant moins vite que l'on est plus près d'une distribution de masse-énergie. En termes de représentation mathématique cet effet est dû au fait que le coefficient $g_{00}(x)$ de $(dx^0)^2$ dans l'Eq. (6) est déformé par rapport à sa valeur en relativité restreinte, $g_{00}^{\text{Minkowski}} = \eta_{00} = -1$, pour devenir $g_{00}^{\text{Einstein}}(x) \simeq -1 + 2GM/c^2 r$, où M est la masse de la Terre (dans notre exemple) et r la distance au centre de la Terre. Dans l'exemple considéré ci-dessus des jumeaux terrestres l'effet est très petit (une différence de vie d'environ une seconde sur 100 ans), mais l'effet est réel et a été vérifié maintes fois en considérant des horloges atomiques (voir références dans [4]). Mentionnons que cet "effet Einstein" a aujourd'hui d'importantes retombées pratiques, par exemple pour la navigation aérienne ou maritime, pour le pilotage des automobiles, ou même d'engins agricoles, etc. En effet le système GPS (Global Positioning System), qui utilise les données transmises par une constellation d'horloges

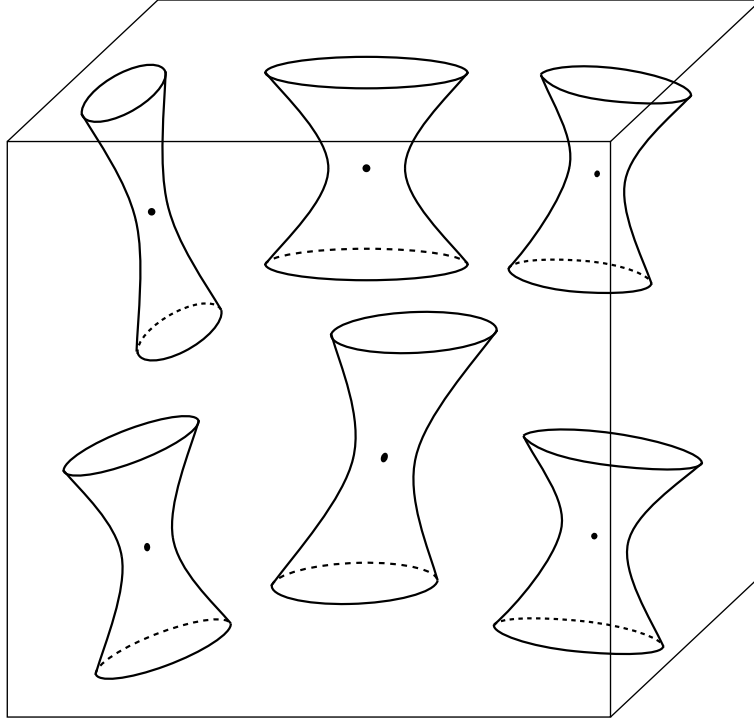


FIG. 2 – Géométrie de l'espace-temps "élastique" de la théorie de la relativité générale. Cette géométrie est visualisée en représentant, autour de chaque point x de l'espace-temps, le lieu des points séparés de x par un petit intervalle (carré) positif donné.

atomiques embarquées sur des satellites, inclut dans son logiciel la déformation einsteinienne de la chronométrie de l'espace-temps. L'effet est seulement de l'ordre du milliardième, mais si on ne le prenait pas en compte, il introduirait dans le système GPS un dysfonctionnement inacceptablement grand, et augmentant continuellement avec le temps. En effet, les performances du système GPS reposent sur la haute stabilité des horloges embarquées, meilleure que 10^{-13} , c'est-à-dire une stabilité 10 000 fois plus grande que le changement apparent de fréquence ($\sim 10^{-9}$) dû à la déformation einsteinienne de la chrono-géométrie.

6 Limite des champs faibles et limite newtonienne

Pour comprendre les conséquences physiques des équations d'Einstein (9), il est utile de commencer en considérant le cas limite des champs géométrico-gravitationnels *faibles*, c'est-à-dire le cas où $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$, avec des quantités $h_{\mu\nu}(x)$ très petites par rapport à l'unité : $|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$. Dans ce cas, un calcul simple (que nous encourageons le lecteur à faire) à partir des définitions (8) et (10) ci-dessus, conduit à la forme explicite suivante des équations d'Einstein (où l'on néglige les termes d'ordre h^2 et hT) :

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu\nu} h^\alpha_\alpha = -\frac{16\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (11)$$

où $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} = \Delta - \partial_0^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 - c^{-2} \partial^2/\partial t^2$ désigne le d'Alembertien "plat" (opérateur des ondes ; $x^\mu = (ct, x, y, z)$), et où les indices en position haute ont été élevés par l'inverse $\eta^{\mu\nu}$ de la métrique plate $\eta_{\mu\nu}$ (numériquement $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, c'est-à-dire $-\eta^{00} = \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1$). Par exemple $\partial^\alpha h_{\alpha\nu}$ désigne

$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\beta\nu}$ et $h_\alpha^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}$. La “source” $\tilde{T}_{\mu\nu}$ apparaissant au membre de droite de (11) désigne (quand l’espace-temps est à quatre dimensions) la combinaison $\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_\alpha^\alpha \eta_{\mu\nu}$.

L’approximation “linéarisée” (11) des équations d’Einstein est analogue aux équations de Maxwell

$$\square A_\mu - \partial_\mu \partial^\alpha A_\alpha = -4\pi J_\mu, \quad (12)$$

reliant le quadri-potentielle électromagnétique $A_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} A^\nu$ (où $A^0 = V$, $A^i = \mathbf{A}$, $i = 1, 2, 3$) à la densité de quadri-courant $J_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} J^\nu$ (où $J^0 = \rho =$ densité de charge et $J^i = \mathbf{J} =$ densité de courant). Une autre analogie est que la structure du membre de gauche des équations de Maxwell (12) implique que la “source” J_μ apparaissant au membre de droite doit satisfaire $\partial^\mu J_\mu = 0$ ($\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$), qui traduit la conservation de la charge électrique. De même la structure du membre de gauche des équations d’Einstein linéarisées (11) implique que le “source” $T_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{T}_\alpha^\alpha \eta_{\mu\nu}$ doit satisfaire $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$, qui traduit la conservation de l’énergie et de l’impulsion de la matière. [La structure du membre de gauche des équations d’Einstein exactes (9) implique que la source $T_{\mu\nu}$ doit satisfaire l’équation plus compliquée $\partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\mu T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu T^{\mu\sigma} = 0$, où les termes en ΓT peuvent être interprétés comme décrivant un échange d’énergie et d’impulsion entre la matière et le champ gravitationnel.] La différence majeure est que, dans le cas de l’électromagnétisme, le champ A_μ et sa source J_μ ont un seul indice d’espace-temps, alors que dans le cas gravitationnel le champ $h_{\mu\nu}$ et sa source $\tilde{T}_{\mu\nu}$ ont deux indices d’espace-temps. Nous reviendrons plus loin sur cette analogie/différence entre A_μ et $h_{\mu\nu}$ qui suggère l’existence d’une certaine parenté entre gravitation et électromagnétisme.

On retrouve la théorie newtonienne de la gravitation comme cas limite de la théorie einsteinienne en supposant non seulement que le champ gravitationnel est une faible déformation de l’espace-temps plat de Minkowski ($h_{\mu\nu} \ll 1$) mais aussi que le champ $h_{\mu\nu}$ est lentement variable ($\partial_0 h_{\mu\nu} \ll \partial_i h_{\mu\nu}$) et que sa source $T_{\mu\nu}$ est non relativiste ($T_{ij} \ll T_{0i} \ll T_{00}$). Sous ces conditions l’équation (11) conduit à une équation pour la composante purement temporelle, h_{00} , du champ espace-temps du type de celle de Poisson,

$$\Delta h_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \tilde{T}_{00} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{00} + T_{ii}) \simeq -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}, \quad (13)$$

où $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ est le Laplacien. Rappelons que, d’après Laplace et Poisson, la théorie newtonienne de la gravitation se résume à dire que le champ gravitationnel est décrit par un seul potentiel $U(x)$, engendré par la densité volumique de masse $\rho(x)$ selon l’équation de Poisson $\Delta U = -4\pi G\rho$, et déterminant l’accélération d’une particule d’épreuve plongée dans le champ extérieur $U(x)$ selon l’équation $d^2 x^i/dt^2 = \partial_i U(x) \equiv \partial U/\partial x^i$. D’après $m_i = m_g = E/c^2$ on peut identifier $\rho = T^{00}/c^2$. On voit alors que (13) reproduit l’équation de Poisson si $h_{00} = +2U/c^2$. Il reste donc à vérifier que la théorie d’Einstein prédit bien qu’une particule d’épreuve non relativiste est accélérée par un champ d’espace-temps selon $d^2 x^i/dt^2 \simeq \frac{1}{2} c^2 \partial_i h_{00}$. Einstein comprit que c’était une conséquence du principe d’équivalence. En effet, tel qu’on l’a discuté dans la section 4 ci-dessus, le principe d’équivalence dit que le champ gravitationnel est (localement) effacé dans un référentiel localement inertiel X^α (où $g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}((X - X_0)^2)$). Dans un tel référentiel, les lois de la relativité restreinte s’appliquent au point X_0 . En particulier un corps isolé (et électriquement neutre) doit y satisfaire au principe d’inertie : son centre de masse se déplace en ligne droite à vitesse constante. Autrement dit il satisfait à l’équation du mouvement $d^2 X^\alpha/ds^2 = 0$. En repassant dans un système de coordonnées (étendu) quelconque x^μ , on vérifie que cette équation du mouvement inertiel local se transforme dans l’équation des géodésiques (7). Donc (7) décrit la chute des corps, telle qu’elle est observée dans un référentiel étendu quelconque (par exemple un référentiel au repos par rapport à la Terre, ou au repos par rapport au barycentre du système solaire). On en conclut

que l'analogie relativiste du champ newtonien d'accélération gravitationnelle, $\mathbf{g}(x) = -\nabla U(x)$, est $g^\lambda(x) \equiv -c^2 \Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\mu/ds dx^\nu/ds$. En considérant une particule dont le mouvement est lent par rapport à la vitesse de la lumière ($dx^i/ds \ll dx^0/ds \simeq 1$) on vérifie facilement que $g^i(x) \simeq -c^2 \Gamma_{00}^i$. En utilisant enfin la définition (8) des $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, et l'hypothèse des champs faibles, on vérifie bien que $g^i(x) \simeq \frac{1}{2} c^2 \partial_i h_{00}$, en parfait accord avec l'identification $h_{00} = 2U/c^2$ anticipée ci-dessus. Nous encourageons le lecteur à vérifier par lui-même ce résultat qui contient l'essence même de la théorie d'Einstein : le mouvement gravitationnel n'est plus décrit comme étant dû à une force, mais est identifié au mouvement "le plus inertiel possible" dans un espace-temps dont la chrono-géométrie est déformée en présence d'une distribution d'énergie et d'impulsion.

Retrouver la théorie newtonienne comme cas limite de la théorie einsteinienne est évidemment une nécessité pour considérer sérieusement cette nouvelle théorie. Mais bien sûr, dès le début, Einstein a exploré les conséquences observationnelles de la relativité générale qui vont au-delà de la description newtonienne de la gravitation. Nous en avons déjà mentionné une ci-dessus : le fait que $g_{00} = \eta_{00} + h_{00} \simeq -1 + 2U(x)/c^2$ implique une distorsion des mesures relatives de temps au voisinage des corps massifs. Einstein prédit dès 1907 (c'est-à-dire dès qu'il conçut le principe d'équivalence, et bien avant d'avoir obtenu les équations de champ de la relativité générale) l'existence d'une telle distorsion des mesures de temps et de fréquence en présence d'un champ gravitationnel extérieur. Il réalisa que cela aurait des conséquences observables pour la fréquence, observée sur Terre, des raies spectrales émises à la surface du soleil. Spécifiquement, une raie spectrale de fréquence (propre locale) ν_0 émise en un point x_0 où le potentiel gravitationnel (stationnaire) vaut $U(\mathbf{x}_0)$ et observée (via des signaux électromagnétiques) en un point x où le potentiel vaut $U(\mathbf{x})$ doit apparaître avoir la fréquence ν telle que

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{g_{00}(x_0)}{g_{00}(x)}} \simeq 1 + \frac{1}{c^2} [U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}_0)]. \quad (14)$$

Dans le cas où le point d'émission x_0 est dans un puits de potentiel gravitationnel plus profond que le point d'observation x (c'est-à-dire $U(\mathbf{x}_0) > U(\mathbf{x})$) on a $\nu < \nu_0$, c'est-à-dire un effet de *rougissement* des fréquences. Cet effet, prédit par Einstein dès 1907, n'a été vérifié, de façon non ambiguë, qu'à partir des années 60 : expériences de Pound et collaborateurs sur une hauteur d'une vingtaine de mètres. La vérification la plus précise (niveau $\sim 10^{-4}$) est due à Vessot et ses collaborateurs, qui comparèrent un maser à hydrogène, embarqué sur une fusée ayant monté jusqu'à $\sim 10\,000$ km d'altitude, à une horloge de construction similaire sur le sol. D'autres expériences comparèrent les temps lus par des horloges embarquées sur des avions à des horloges restées sur le sol. [Pour les références à ces expériences voir [4].] Comme on l'a déjà dit, l'"effet Einstein" (14) doit être incorporé de façon cruciale dans les logiciels des systèmes de positionnement par satellites comme GPS.

Einstein indiqua, aussi, dès 1907 que le principe d'équivalence suggérait que les rayons lumineux devaient être défléchis par un champ gravitationnel. En effet, une généralisation du raisonnement, fondé sur le principe d'équivalence, donné ci-dessus pour le mouvement des particules dans un champ gravitationnel extérieur montre que la lumière doit elle aussi suivre les mouvements "les plus inertiels possibles", c'est-à-dire des géodésiques de l'espace-temps courbe. Les rayons lumineux doivent donc satisfaire à l'équation des géodésiques (7). [La seule différence avec les géodésiques suivies par les particules matérielles est que le paramètre s de l'équation (7) ne peut plus être pris égal à la "longueur" le long de la géodésique, car une géodésique "de lumière" doit aussi satisfaire la contrainte $g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = 0$ exprimant que sa vitesse est égale à c , quand elle est mesurée dans un référentiel localement inertiel.] En partant de l'équation (7) on peut donc calculer quelle est la déflexion de la lumière quand elle passe au voisinage d'une masse importante (comme le Soleil). Pour faire ce

calcul, on s’aperçoit cependant rapidement qu’il faut connaître plus que la composante h_{00} du champ gravitationnel. Les autres composantes de $h_{\mu\nu}$, et notamment les composantes spatiales h_{ij} interviennent de façon cruciale dans le calcul. C’est pourquoi c’est seulement en novembre 1915, après avoir obtenu la forme (essentiellement) finale de sa théorie, qu’Einstein put prédire la valeur complète de la déflexion de la lumière par le Soleil. En partant des équations d’Einstein linéarisées (11), et en continuant à faire les simplifications “non relativistes” indiquées ci-dessus ($T_{ij} \ll T_{0i} \ll T_{00}$; $\partial_0 h \ll \partial_i h$) il est facile de voir que la composante spatiale h_{ij} peut, comme h_{00} , s’écrire (après un choix commode de coordonnées) en termes du potentiel newtonien U selon $h_{ij}(x) \simeq +2U(x)\delta_{ij}/c^2$, où δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon ($i, j = 1, 2, 3$). En insérant ce résultat, ainsi que le résultat précédent $h_{00} = +2U/c^2$, dans l’équation géodésique (7) pour le mouvement de la lumière, on trouve (comme le fit Einstein en 1915) que la relativité générale prédit que le Soleil doit défléchir un rayon lumineux d’un angle $\theta = 4GM/(c^2b)$ où b est le paramètre d’impact du rayon (c’est-à-dire sa distance minimale au Soleil). Comme l’on sait, la confirmation (avec une faible précision) de cet effet en 1919 rendit célèbre la théorie de la relativité générale et son auteur.

7 Approximation post-newtonienne et confirmations expérimentales dans le régime des champs gravitationnels faibles et quasi-stationnaires

On a déjà indiqué ci-dessus quelques confirmations expérimentales de la théorie de la relativité générale. A l’heure actuelle, la très grande précision de certaines mesures de durée ou de fréquence dans le système solaire nécessite de tenir compte très soigneusement des modifications que la relativité générale apporte à la description newtonienne de l’espace-temps. Par conséquent, la relativité générale est utilisée dans un grand nombre de situations, depuis la recherche astronomique ou géophysique (interférométrie radio à très longue base, poursuite radar des planètes, poursuite laser de la Lune ou de satellites artificiels) jusqu’aux applications météorologiques, géodésiques ou autres (définition du temps atomique international, cartographie de précision, système G.P.S.). Pour ce faire, une méthode d’approximation, dite *post-newtonienne*, a été développée. Cette méthode consiste à compléter la limite newtonienne esquissée ci-dessus en gardant les termes supérieurs dans le petit paramètre (v désignant une vitesse caractéristique des éléments du système considéré)

$$\varepsilon \sim \frac{v^2}{c^2} \sim |h_{\mu\nu}| \sim |\partial_0 h / \partial_i h|^2 \sim |T^{0i} / T^{00}|^2 \sim |T^{ij} / T^{00}|.$$

Pour toutes les applications présentes de la relativité générale dans le système solaire, il suffit d’inclure la *première approximation post-newtonienne*, c’est-à-dire de garder les corrections relatives d’ordre ε aux prédictions newtoniennes. Comme pendant longtemps la théorie de la relativité générale était mal vérifiée on a trouvé utile (selon les travaux pionniers d’A. Eddington, généralisés dans les années 60 par K. Nordtvedt et C.M. Will) d’étudier non seulement les prédictions précises des équations (9) définissant la théorie d’Einstein, mais de considérer aussi des déviations possibles à ces prédictions. Ces déviations possibles furent paramétrisées au moyen de plusieurs paramètres (non dimensionnés) dits “post-newtoniens”. Parmi ces paramètres, deux jouent un rôle clé : γ et β . Le paramètre γ paramétrise une déviation possible de la relativité générale intervenant dès le niveau linéarisé, c’est-à-dire modifiant l’approximation linéarisée donnée ci-dessus. Plus précisément, il est défini en écrivant que l’écart $h_{ij} \equiv g_{ij} - \delta_{ij}$ entre la métrique d’espace et la métrique euclidienne pourrait valoir (dans un système de coordonnées adéquat), non pas la valeur $h_{ij}^{\text{GR}} = 2U\delta_{ij}/c^2$ qu’il prend en relativité générale, mais la valeur $h_{ij} = 2\gamma U\delta_{ij}/c^2$, différant d’un facteur γ . Donc, par définition γ vaut 1 en relativité générale, et

$\gamma - 1$ mesure une déviation possible par rapport à cette théorie. Quant au paramètre β (ou plutôt $\beta - 1$) il mesure une déviation possible (par rapport à la relativité générale) dans la valeur de $h_{00} \equiv g_{00} - \eta_{00}$. La valeur de h_{00} en relativité générale est $h_{00}^{\text{GR}} = 2U/c^2 - 2U^2/c^4$, où le premier terme (discuté ci-dessus) reproduit l'approximation newtonienne (et ne peut donc pas être modifié si l'idée est de paramétriser la physique gravitationnelle au-delà des prédictions newtoniennes) et où le deuxième terme est obtenu en résolvant les équations d'Einstein (9) au deuxième ordre d'approximation. On écrit alors un h_{00} d'un type paramétrisé plus général, $h_{00} = 2U/c^2 - 2\beta U^2/c^4$, où, par définition, β vaut 1 en relativité générale. Signalons enfin que les paramètres $\gamma - 1$ et $\beta - 1$ paramétrisent complètement le régime post-newtonien des alternatives théoriques les plus simples à la relativité générale, c'est-à-dire les théories tenseur-scalaires de la gravitation. Dans ces théories, l'interaction gravitationnelle est transportée par deux champs à la fois : un champ tensoriel (spin 2) de masse nulle couplé à $T^{\mu\nu}$, et un champ scalaire φ (spin 0) de masse nulle couplé à la trace T^α_α . Le paramètre $-(\gamma - 1)$ joue alors le rôle clé de mesurer le rapport entre le couplage scalaire et le couplage tensoriel.

Toutes les expériences réalisées à ce jour dans le système solaire sont compatibles avec les prédictions de la relativité générale. Quand elles sont interprétées en termes des paramètres post-newtoniens (et "post-einsteiniens") $\gamma - 1$ et $\beta - 1$, elles conduisent à de fortes contraintes sur les déviations possibles de la théorie d'Einstein. Citons parmi les tests réalisés dans le système solaire, la déflexion d'ondes électromagnétiques au voisinage du soleil, le retard gravitationnel (effet Shapiro) d'échos radars sur la station Viking posée sur Mars, l'analyse globale de la dynamique du système solaire (incluant l'avance des périhélie planétaires), la mesure sub-centimétrique de la distance Terre-Lune obtenue à partir d'échos lasers sur les réflecteurs déposés sur la Lune, etc. A l'heure actuelle (Octobre 2006) le test (ayant fait l'objet d'une publication) le plus précis de la relativité générale a été obtenu en 2003 en mesurant le rapport $1 + y \equiv f/f_0$ entre la fréquence f_0 d'ondes radio envoyées depuis la Terre vers la sonde spatiale Cassini et la fréquence f d'ondes radio cohérentes renvoyées (avec la même fréquence locale) par Cassini vers la Terre et comparées (sur Terre) à la fréquence d'émission f_0 . La contribution principale à la petite quantité y est un effet égal, en relativité générale, à $y_{\text{GR}} = 8(GM/c^3 b) db/dt$ (où b est, comme ci-dessus, le paramètre d'impact) dû à la propagation des ondes radios dans la géométrie d'espace-temps déformée par le Soleil : $ds^2 \simeq -(1 - 2U/c^2)c^2 dt^2 + (1 + 2U/c^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, où $U = GM/r$. La valeur maximale du changement de fréquence prédit par la relativité générale était seulement $|y_{\text{GR}}| \lesssim 2 \times 10^{-10}$ pour les meilleures observations, mais grâce à une excellente stabilité de fréquence $\sim 10^{-14}$ (après correction des perturbations causées par la couronne solaire) et à un relativement grand nombre de mesures individuelles réparties sur 18 jours, cette expérience a pu vérifier la théorie d'Einstein au niveau remarquable de $\sim 10^{-5}$ [7]. Plus précisément, quand cette expérience est interprétée en termes des paramètres post-newtoniens $\gamma - 1$ et $\beta - 1$, elle donne la limite suivante sur le paramètre $\gamma - 1$ [7]

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}. \quad (15)$$

Quant à la meilleure limite actuelle sur le paramètre $\beta - 1$, elle est meilleure que 10^{-3} et provient de la non-observation, dans les données des échos lasers sur la Lune, d'une éventuelle polarisation de l'orbite de la Lune en direction du Soleil (effet Nordtvedt ; voir [4] pour les références)

$$4(\beta - 1) - (\gamma - 1) = -0.0007 \pm 0.0010. \quad (16)$$

Bien que la théorie de la relativité générale soit une des mieux vérifiées de la physique, les scientifiques continuent de concevoir et de planifier des tests nouveaux, ou encore plus fins, de cette théorie. C'est en particulier le cas de la mission spatiale Gravity Probe B (envoyée par la NASA en avril 2004) dont le but principal est d'observer

directement une prédiction de la relativité générale qui dit (intuitivement) que l'espace est non seulement "élastique", mais aussi "fluide". Au dix-neuvième siècle Foucault avait inventé à la fois le gyroscope et son célèbre pendule pour rendre directement observable l'espace absolu (et rigide) de Newton. Ses expériences montraient en effet que, par exemple, un gyroscope à la surface de la Terre continuait, malgré la rotation de la Terre, à s'aligner avec une direction "fixe" par rapport aux étoiles lointaines. Or, quand Lense et Thirring analysèrent, en 1918, certaines des conséquences des équations (linéarisées) d'Einstein (11), ils trouvèrent que la relativité générale prédit, entre autres, le phénomène suivant : la rotation de la Terre (ou de n'importe quelle boule de matière) crée une déformation particulière de la chrono-géométrie de l'espace-temps. Cette déformation est décrite par les composantes "gravito-magnétiques" h_{0i} de la métrique, et induit un effet analogue à l'effet d'"entraînement en rotation" que cause une boule de matière tournant dans un fluide : la rotation de la Terre entraîne, d'une façon minime, tout l'espace autour d'elle à "tourner" continuellement comme le ferait un fluide⁴. Cette "rotation de l'espace" se traduit, de façon observable, par une violation des effets prévus par Newton et confirmés par les expériences de Foucault : en particulier, un gyroscope ne s'aligne plus avec une direction "fixe dans l'espace absolu", mais son axe de rotation est "entraîné" par le mouvement de rotation de l'espace local où il se trouve. Cet effet était bien trop petit pour être visible dans les expériences de Foucault. Son observation par Gravity Probe B (voir [8] et la contribution de John Mester à ce séminaire Poincaré) est importante pour rendre sensible au plus grand nombre la notion einsteinienne révolutionnaire d'un espace-temps fluide.

Jusqu'ici nous n'avons discuté que le régime des champs gravitationnels faibles et lentement variables. La théorie de la relativité générale prévoit l'apparition de nouveaux phénomènes quand le champ gravitationnel devient fort et/ou rapidement variable. [Nous ne discuterons pas ici les aspects cosmologiques de la gravitation relativiste.]

8 Champs gravitationnels forts. Trous noirs

Le régime des champs gravitationnels forts se rencontre dans la physique des *corps gravitationnellement condensés*. Ce vocable désigne les états finals de l'évolution des étoiles, et tout particulièrement les étoiles à neutrons et les trous noirs. Rappelons que la plus grande partie de la vie d'une étoile se passe à brûler, de façon lente, son carburant nucléaire. Ce processus conduit à structurer l'étoile en une suite de couches de composition nucléaire différenciée, entourant un cœur de plus en plus dense (structure "en oignon"). Quand la masse initiale de l'étoile est suffisamment grande, ce processus finit par conduire à un phénomène catastrophique : le cœur, déjà beaucoup plus dense que la matière ordinaire, s'effondre sur lui-même, sous l'influence de son auto-attraction gravitationnelle. [Cette implosion de la partie centrale de l'étoile est accompagnée, dans beaucoup de cas, par une explosion des couches extérieures de l'étoile (phénomène de supernova).] Selon la masse qui s'effondre avec le cœur de l'étoile, cet effondrement peut donner lieu soit à la formation d'une étoile à neutrons, soit à celle d'un trou noir.

Une *étoile à neutrons* condense une masse de l'ordre de la masse du Soleil dans un rayon de l'ordre de 10 km. La densité à l'intérieur d'une étoile à neutrons (ainsi appelée car les neutrons dominent dans sa composition nucléaire) dépasse cent millions de tonnes par centimètre cube (10^{14} g/cm³) ! Elle est de l'ordre de grandeur de la densité à l'intérieur des noyaux des atomes. Ce qui est important pour notre propos est que la déformation de la métrique de Minkowski au voisinage immédiat d'une étoile à neutrons, mesurée par $h_{00} \sim h_{ii} \sim 2GM/c^2R$, où R est le rayon de l'étoile, n'est plus

⁴Des travaux historiques récents (dus à Herbert Pfister) ont en fait montré que cet effet avait déjà été dérivé par Einstein dans le cadre de la théorie relativiste provisoire de la gravitation qu'il développa à partir de 1912 en collaboration avec Marcel Grossmann.

du tout une petite quantité, comme elle l'était dans le système solaire. En effet, alors que $h \sim 2GM/c^2R$ était de l'ordre de 10^{-9} pour la Terre, et de 10^{-6} pour le Soleil, on trouve que $h \sim 0.4$ pour une étoile à neutrons typique ($M \simeq 1.4 M_\odot$, $R \sim 10$ km). On en conclut qu'il n'est plus possible, comme c'était le cas dans le système solaire, d'étudier la structure et la physique des étoiles à neutrons en utilisant l'approximation post-newtonienne évoquée ci-dessus. Il faut considérer les équations d'Einstein exactes (9), avec toute leur structure non-linéaire. A cause de ceci, on s'attend à ce que des observations concernant des étoiles à neutrons puissent nous permettre de confirmer (ou d'infirmer) la théorie de la relativité générale dans son régime fortement non-linéaire. Nous discuterons de tels tests ci-dessous à propos des observations de pulsars binaires.

Un *trou noir* est le résultat d'un effondrement *continué*, c'est-à-dire qui ne s'est pas arrêté à la formation d'une étoile ultra-dense (comme une étoile à neutron). [Le concept physique de trou noir a été introduit par J.R. Oppenheimer et H. Snyder en 1939. La structure géométrique globale des trous noirs n'a été comprise que des années plus tard, notamment grâce aux travaux de R. Penrose. Pour une revue historique du concept de trou noir voir [9].] C'est une structure particulière d'espace-temps courbe caractérisée par l'existence d'une frontière (dite "surface du trou noir" ou "horizon") entre une région extérieure, d'où il est possible d'émettre des signaux à l'infini, et une région (d'espace-temps) intérieure, où tout signal émis reste piégé. Voir Fig. 3.

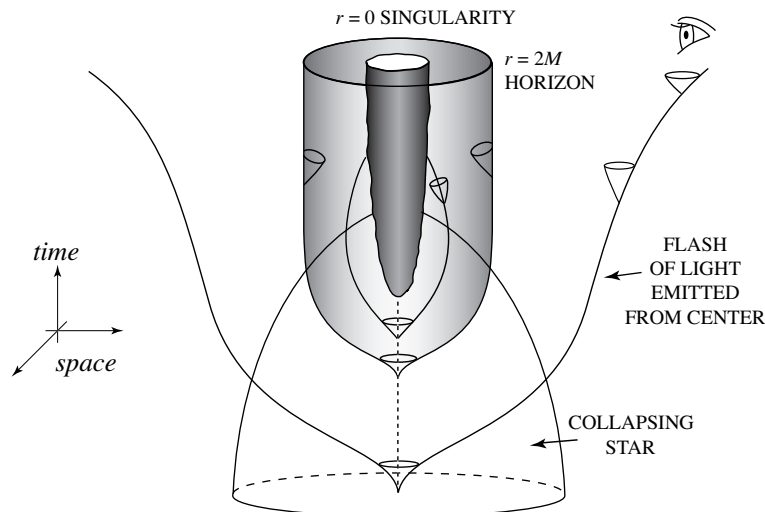


FIG. 3 – Représentation schématique de l'espace-temps d'un trou noir engendré par l'effondrement d'une étoile sphérique. Chaque cône représente l'histoire spatio-temporelle d'un éclair lumineux émis à partir d'un point à un certain instant. [Un tel "champ de cônes" est obtenu en prenant la limite $\varepsilon^2 = 0$ de la Fig. 2, et en ne gardant que la partie supérieure, c'est-à-dire dirigée vers le futur, des doubles cônes obtenus comme limites des hyperboloïdes de la Fig. 2.] L'intérieur du trou noir est indiqué en grisé, sa frontière extérieure étant la "surface du trou noir" ou "horizon". La "frontière intérieure" (indiquée en grisé foncé) de la région intérieure du trou noir est une singularité de l'espace-temps du type big-crunch.

Les cônes indiqués sur cette figure sont ce qu'on appelle des "cônes de lumière". Ils sont définis comme le lieu des points (infinitement voisins de x) tels que $ds^2 = 0$, avec $dx^0 = cdt \geq 0$. Chacun représente le début de l'histoire spatio-temporelle d'un éclair lumineux émis d'un certain point d'espace-temps. Les cônes dont le sommet est situé à l'extérieur de l'horizon (zone claire) vont évoluer en s'évasant jusqu'à l'infini, représentant ainsi la possibilité pour des signaux électromagnétiques d'atteindre

l'infini.

En revanche, les cônes dont le sommet est situé à l'intérieur de l'horizon (zone grisée) vont évoluer sans jamais réussir à sortir de la zone grisée. Il est donc impossible d'émettre, depuis la zone grisée, un signal électromagnétique atteignant l'infini. L'horizon, c'est-à-dire la frontière entre la zone grisée et la zone claire, est, quant à lui, l'histoire d'un éclair lumineux particulier, émis du centre de l'étoile au cours de l'effondrement, et tel qu'il se stabilise asymptotiquement en un cylindre d'espace-temps. Ce cylindre d'espace-temps (horizon asymptotique) représente donc l'histoire spatio-temporelle d'une bulle de lumière qui, vue localement, se déplace vers l'extérieur à la vitesse c , mais qui, globalement, fait du "sur-place". Ce comportement remarquable est une illustration frappante du caractère "fluide" de l'espace-temps einsteinien. En effet, on pourrait comparer la situation précédente à ce qui peut se passer autour de la bonde ouverte d'un évier en train de se vider : une onde peut se déplacer, vers l'extérieur, sur l'eau tout en faisant du sur-place par rapport à l'évier à cause du mouvement de chute de l'eau en direction de la bonde.

Notons que le développement temporel de la région intérieure est limité, se terminant (surface gris foncé) par une *singularité* où la courbure devient infinie et où la description classique de l'espace et du temps perd son sens. Cette singularité est localement semblable à l'inverse temporel d'une singularité cosmologique du type big bang. On l'appelle un *big crunch*. C'est un bord de l'espace-temps, au-delà duquel l'espace-temps cesse d'exister. L'apparition de singularités associées à des régions de champ gravitationnel fort est un phénomène générique en relativité générale, comme le montrent des théorèmes dus à R. Penrose et S.W. Hawking.

Les trous noirs ont des propriétés remarquables. D'abord, un théorème d'*unicité* (dû à W. Israel, B. Carter, D.C. Robinson, G. Bunting et P.O. Mazur) affirme qu'un trou noir stationnaire isolé (en théorie d'Einstein-Maxwell) est complètement décrit par trois paramètres : sa masse M , son moment cinétique J et sa charge électrique Q . La solution exacte (dite de Kerr-Newman) des équations d'Einstein (11) décrivant un trou noir de paramètres M, J, Q est connue explicitement. Contentons nous d'écrire la géométrie d'espace-temps du cas particulier le plus simple de trou noir : celui où $J = Q = 0$ et où le trou noir n'est décrit que par sa masse (solution découverte par K. Schwarzschild dès janvier 1916) :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (17)$$

On voit que la composante purement temporelle de la métrique, $g_{00} = -(1 - 2GM/c^2 r)$, s'annule quand la coordonnée radiale r vaut $r = r_H \equiv 2GM/c^2$. D'après la première équation (14), il semblerait donc que la lumière émise d'un point quelconque de la sphère $r_0 = r_H$ subisse, quand elle est vue par un observateur situé n'importe où à l'extérieur (en $r > r_H$), un rougissement infini de sa fréquence d'émission ($\nu/\nu_0 = 0$). En fait, la sphère $r_H = 2GM/c^2$ est l'*horizon* du trou noir de Schwarzschild, et aucune particule (susceptible d'émettre de la lumière) ne peut rester au repos en $r = r_H$ (ni *a fortiori* en $r < r_H$). Pour étudier ce qui se passe sur l'horizon ($r = r_H$), ou à l'intérieur d'un trou noir de Schwarzschild ($r < r_H$), il faut utiliser d'autres coordonnées d'espace-temps que les coordonnées (t, r, θ, φ) utilisées dans l'Eq. (17). La singularité de "big crunch" à l'intérieur d'un trou noir de Schwarzschild est située, dans les coordonnées de (17), en $r = 0$ (qui ne désigne pas, comme on pourrait le croire, un point dans l'espace, mais bien un instant dans le temps).

La métrique d'espace-temps d'un trou noir, comme l'Eq. (17) dans le cas simple où $J = Q = 0$, permet d'étudier l'influence d'un trou noir sur les particules et les champs présents dans son voisinage. On trouve ainsi qu'un trou noir est un puits de potentiel gravitationnel si profond que toute particule, ou onde, qui pénètre à l'intérieur du trou noir (dans la région $r < r_H$) ne peut plus jamais ressortir du trou

noir, et que l'énergie totale de la particule ou onde qui "tombe" dans le trou noir vient s'ajouter à la masse-énergie totale M du trou noir. En étudiant (à la suite de R. Penrose) de tels processus d'"accrétion" d'un trou noir par chute de particules, D. Christodoulou et R. Ruffini montrèrent qu'un trou noir est non seulement un puits de potentiel, mais aussi un objet physique possédant une *énergie libre* importante qu'il est possible, en principe, d'extraire. L'*énergétique des trous noirs* est résumée dans la "formule de masse" de Christodoulou et Ruffini (en unités où $c = 1$)

$$M^2 = \left(M_{\text{irr}} + \frac{Q^2}{4GM_{\text{irr}}} \right)^2 + \frac{J^2}{4G^2M_{\text{irr}}^2}, \quad (18)$$

où M_{irr} désigne la *masse irréductible* du trou noir, une quantité *qui ne peut qu'augmenter de manière irréversible*. On déduit de (18) qu'un trou noir tournant ($J \neq 0$) et/ou chargé ($Q \neq 0$) possède une énergie libre $M - M_{\text{irr}} > 0$ qui peut, en principe, être extraite par les processus réduisant son moment cinétique et/ou sa charge électrique. De tels processus d'extraction d'énergie de trous noirs pourraient être à l'origine de certains phénomènes astrophysiques ultra-énergétiques (comme les quasars ou les "gamma ray bursts"). Notons que, selon l'Eq. (18), les trous noirs (tournants ou chargés) sont les plus grands réservoirs d'énergie libre de l'Univers : en effet, 29% de leur énergie de masse peut être stockée sous forme d'énergie cinétique de rotation, et jusqu'à 50% peut être stockée sous forme d'énergie électrique. Ces pourcentages sont très supérieurs aux quelques pour cent d'énergie de liaison nucléaire qui sont à l'origine de toute la lumière émise par les étoiles pendant leur vie. Bien qu'il n'y ait pas, à ce jour, de preuve irréfutable de l'existence de trous noirs dans l'univers, tout un faisceau de présomptions très fortes militent en faveur de leur existence. En particulier, plus d'une douzaine de systèmes binaires, émetteurs de rayons X, de notre Galaxie sont probablement constitués d'un trou noir et d'une étoile ordinaire. En outre, le centre de notre Galaxie semble contenir une concentration très compacte de masse $\sim 3 \times 10^6 M_{\odot}$ qui est probablement un trou noir. [Pour une revue des données observationnelles conduisant à ces conclusions voir par exemple la section 7.6 du livre récent de N. Straumann [6].]

Le fait qu'une quantité associée à un trou noir, ici la masse irréductible M_{irr} , ou, selon un résultat plus général dû à S.W. Hawking l'aire totale A de la surface d'un trou noir ($A = 16\pi G^2 M_{\text{irr}}^2$), ne puisse évoluer qu'en augmentant d'une façon irréversible, est réminiscent de la deuxième loi de la thermodynamique. Ce résultat a suggéré à J.D. Bekenstein d'interpréter l'aire de l'horizon, A , comme étant proportionnelle à l'*entropie* du trou noir. Une telle interprétation thermodynamique est renforcée par l'étude de l'accroissement de A sous l'influence de perturbations externes, accroissement que l'on peut en effet attribuer à des propriétés dissipatives locales de la surface du trou noir : notamment une viscosité surfacique et une résistivité électrique surfacique égale à 377 ohm (selon les travaux de T. Damour et R.L. Znajek). Ces interprétations "thermodynamiques" des propriétés des trous noirs restent de simples analogies au niveau de la physique classique, mais un résultat remarquable de Hawking a montré qu'elles avaient un contenu réel au niveau de la physique quantique. En 1974, Hawking découvrit que la présence d'un horizon dans l'espace-temps d'un trou noir affectait la définition d'une particule quantique, et conduisait un trou noir à émettre, de façon continue, un flux de particules ayant le spectre caractéristique (spectre de Planck) d'une émission thermique à la température $T = 4\hbar G \partial M / \partial A$, où \hbar désigne la constante de Planck réduite. En utilisant la relation thermodynamique générale reliant la température à l'énergie $E = M$ et à l'entropie S , $T = \partial M / \partial S$, on voit que le résultat de Hawking suggère (en conformité avec les idées de Bekenstein) qu'un trou noir possède une *entropie* S égale à (toujours avec $c = 1$)

$$S = \frac{1}{4} \frac{A}{\hbar G}. \quad (19)$$

La formule de Bekenstein-Hawking (19) suggère une connexion inattendue, et peut être profonde, entre gravitation, thermodynamique et théorie quantique. Voir Section 11 plus bas.

9 Pulsars binaires et confirmations expérimentales du régime des champs gravitationnels forts et radiatifs

Les “pulsars binaires” sont des systèmes binaires constitués d’un pulsar (étoile à neutrons en rotation rapide sur elle-même) et d’une étoile compagnon très dense (étoile à neutrons ou naine blanche). Le premier système de ce type (appelé PSR B1913+16) a été découvert par R.A. Hulse et J.H. Taylor en 1974 [10]. On en connaît aujourd’hui une dizaine. Certains d’entre eux (et notamment le premier découvert PSR B1913+16) se sont révélés être des sondes remarquables de la gravitation relativiste, et, notamment, du régime des champs gravitationnels forts et/ou radiatifs. La raison pour laquelle un pulsar binaire permet de sonder la physique des champs gravitationnels forts est que, comme on l’a déjà indiqué ci-dessus, la déformation de la géométrie de l’espace-temps au voisinage d’une étoile à neutrons n’est plus, comme dans le système solaire, une petite quantité, mais qu’elle est de l’ordre de l’unité : $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \sim 2GM/c^2 R \sim 0.4$. [Notons que cette valeur est seulement 2.5 fois plus petite que dans le cas extrême d’un trou noir pour lequel $2GM/c^2 R = 1$.] En outre, le fait que l’interaction gravitationnelle se propage à la vitesse de la lumière (comme l’indique la présence de l’opérateur des ondes, $\square = \Delta - c^{-2}\partial^2/\partial t^2$ dans (11)) entre le pulsar et son compagnon, se trouve jouer un rôle observationnellement significatif dans certains pulsars binaires.

Indiquons comment les données observationnelles des pulsars binaires sont utilisées pour sonder le régime des champs gravitationnels forts ($h_{\mu\nu}$ de l’ordre de l’unité) et/ou radiatifs (propagation d’effets à la vitesse c). [Pour plus de détails sur les données observationnelles des pulsars binaires et sur leur utilisation pour sonder la gravitation relativiste, voir la contribution de Michael Kramer à ce séminaire Poincaré.] Essentiellement un pulsar joue le rôle d’une *horloge* très stable. En effet, le “phénomène pulsar” est dû à la rotation d’un faisceau d’ondes électromagnétiques, créé au voisinage des deux pôles magnétiques d’une étoile à neutrons fortement magnétisée (champ magnétique de l’ordre de 10^{12} Gauss, c’est-à-dire 10^{12} fois le champ magnétique terrestre). L’axe magnétique d’un pulsar n’étant pas aligné avec son axe de rotation, la rotation rapide du pulsar fait tourner en bloc la magnétosphère (proche) du pulsar et par là même le faisceau d’ondes électromagnétiques engendré près des pôles magnétiques. Le pulsar est donc analogue à un phare qui balaie l’espace d’un double faisceau d’ondes électromagnétiques (un par pôle). Comme pour un phare, on ne voit le pulsar depuis la Terre que quand l’un de ses faisceaux balaie la Terre engendrant ainsi une bouffée de bruit électromagnétique à chaque tour du pulsar sur lui-même (dans certains cas, on voit même, après chaque demi-tour, une bouffée secondaire liée à l’émission du deuxième pôle). On peut mesurer le temps d’arrivée sur Terre (du centre) de chaque bouffée de bruit électromagnétique. Les données observationnelles essentielles d’un pulsar sont ainsi constituées de la suite discrète régulière des *temps d’arrivée* sur Terre de ces bouffées ou “impulsions”. Cette suite est analogue aux signaux d’une horloge : tic, tic, tic, ... On trouve observationnellement que certains pulsars (et notamment ceux qui sont dans des systèmes binaires) définissent ainsi des horloges d’une stabilité comparable aux meilleures horloges atomiques [11]. Dans le cas d’un pulsar solitaire, la suite de ses temps d’arrivées est (essentiellement) une “suite arithmétique” régulière, $T_N = aN + b$, où N est un nombre entier qui est le numéro de l’impulsion considérée, et où a est égal à la période de rotation du pulsar sur lui-même. Dans le cas d’un pulsar binaire, la suite de ses temps d’arrivée est un signal beaucoup plus riche, disons, $T_N = aN + b + \Delta_N$, où Δ_N mesure la déviation par rapport à une suite arithmétique régulière. Cette déviation est due (après sous-

traction d'effets non liés à la période orbitale du pulsar) a tout un ensemble d'effets physiques liés au mouvement orbital du pulsar autour de son compagnon, ou plus exactement, autour du centre de masse du système binaire. Certains de ces effets pourraient être prévus par une description purement *képlérienne* du mouvement du pulsar dans l'espace, et sont analogues à l'"effet Rømer" qui permit à ce dernier de déterminer pour la première fois la vitesse de la lumière à partir des temps d'arrivées sur Terre de signaux lumineux venant des satellites de Jupiter (les signaux lumineux venant d'un corps se déplaçant sur une orbite sont "en retard" du temps mis par la lumière pour traverser cette orbite et parvenir à la Terre). D'autres effets ne peuvent être prévus et calculés qu'en utilisant une description *relativiste* soit du mouvement orbital du pulsar, soit de la propagation des signaux électromagnétiques entre le pulsar et la Terre. Par exemple, il faut tenir compte des faits suivants : (i) l'"horloge pulsar" se déplace à une vitesse importante (de l'ordre de $300 \text{ km/s} \sim 10^{-3}c$) et est plongée dans le potentiel gravitationnel variable dû au compagnon ; (ii) l'orbite du pulsar n'est pas une simple ellipse képlérienne mais (en relativité générale) une orbite plus compliquée qui trace une rosace autour du centre de masse ; (iii) la propagation des signaux électromagnétiques entre le pulsar et la Terre s'effectue dans un espace-temps courbé à la fois par le pulsar et son compagnon, ce qui conduit à des effets de retard relativiste particuliers ; etc. La prise en compte des effets relativistes dans la description théorique des temps d'arrivée des signaux émis par des pulsars binaires conduit alors à écrire ce qu'on appelle une "formule de chronométrage". Cette formule de chronométrage (due à T. Damour et N. Deruelle) permet essentiellement de paramétriser la suite des temps d'arrivée, $T_N = aN + b + \Delta_N$, c'est-à-dire de paramétriser Δ_N , en fonction d'un ensemble de "paramètres phénoménologiques", qui comprennent non seulement des paramètres dits "képlériens" (comme la période orbitale P , la projection $x_A = a_A \sin i$ du demi-grand axe de l'orbite du pulsar sur la ligne de visée, et l'excentricité e), mais aussi des paramètres *post-képlériens* associés aux effets relativistes mentionnés ci-dessus. Par exemple, l'effet (i) discuté ci-dessus est paramétrisé par une quantité notée γ_T ; l'effet (ii) par (entre autres) les quantités $\dot{\omega}$, \dot{P} ; l'effet (iii) par les quantités r , s ; etc.

La façon dont les observations des pulsars binaires permet de tester les théories relativistes de la gravitation est alors la suivante. Un ajustage (de moindres carrés) entre les données observationnelles de chronométrage, Δ_N^{obs} , et la formule théorique, paramétrisée de chronométrage, $\Delta_N^{\text{th}}(P, x_A, e; \gamma_T, \dot{\omega}, \dot{P}, r, s)$, permet de déterminer les valeurs observationnelles des paramètres képlériens ($P^{\text{obs}}, x_A^{\text{obs}}, e^{\text{obs}}$) et post-képlériens ($\gamma_T^{\text{obs}}, \dot{\omega}^{\text{obs}}, \dot{P}^{\text{obs}}, r^{\text{obs}}, s^{\text{obs}}$). La théorie de la relativité générale prédit la valeur de chaque paramètre post-képlérien en fonction des paramètres képlériens, et des deux masses du système binaire : la masse m_A du pulsar, et la masse m_B du compagnon. Par exemple, la valeur théorique prédite par la relativité générale pour le paramètre γ_T est $\gamma_T^{\text{GR}}(m_A, m_B) = en^{-1}(GMn/c^3)^{2/3} m_B(m_A + 2m_B)/M^2$, où e est l'excentricité, $n = 2\pi/P$ la fréquence orbitale, et $M \equiv m_A + m_B$. On voit alors que la mesure observationnelle d'un paramètre post-képlérien, par exemple γ_T^{obs} , détermine, si l'on suppose que la relativité générale est correcte, une *courbe* dans le plan (m_A, m_B) des deux masses : $\gamma_T^{\text{GR}}(m_A, m_B) = \gamma_T^{\text{obs}}$, dans notre exemple. La mesure de deux paramètres post-képlériens donne ainsi deux courbes dans le plan (m_A, m_B) et permet, génériquement, de déterminer les valeurs des deux masses m_A et m_B , en considérant l'intersection des deux courbes. On obtient un test de la relativité générale à partir du moment où l'on mesure observationnellement trois, ou plus, paramètres post-képlériens : si les trois (ou plus) courbes s'intersectent en un point du plan des masses, la théorie de la relativité générale est confirmée, mais si ça n'est pas le cas la théorie est infirmée. A l'heure actuelle, quatre pulsars binaires distincts ont permis de tester la relativité générale. Ces quatre pulsars binaires "relativistes" sont : le premier pulsar binaire PSR B1913+16, le pulsar PSR B1534+12 (découvert par A. Wolszczan en 1991), et deux pulsars découverts récemment : PSR J1141-6545 (découvert en

1999 par V.M. Kaspi et al. et dont les premiers résultats de chronométrage sont dus à M. Bailes et al. en 2003), et PSR J0737–3039 (découvert en 2003 par M. Burgay et al., et dont les premiers résultats de chronométrage sont dus à A.G. Lyne et al. et M. Kramer et al.). A l’exception de PSR J1141–6545 dont le compagnon est une naine blanche, les compagnons des trois autres pulsars sont des étoiles à neutrons. Dans le cas de PSR J0737–3039 le compagnon se trouve être aussi un pulsar visible depuis la Terre.

Dans le système PSR B1913+16 on a mesuré *trois* paramètres post-képlériens ($\dot{\omega}, \gamma_T, \dot{P}$), ce qui donne *un* test de la théorie. Dans le système PSR J1141–65 on a mesuré *trois* paramètres post-képlériens ($\dot{\omega}, \gamma_T, \dot{P}$), ce qui donne *un* test de la théorie. [Le paramètre s est aussi mesuré par des phénomènes de scintillation, mais l’utilisation de cette mesure pour tester la gravitation est plus problématique.] Dans le système PSR B1534+12 on a mesuré *cinq* paramètres post-képlériens, ce qui donne *trois* tests de la théorie. Dans le système PSR J0737–3039 on a mesuré *six* paramètres post-képlériens⁵, ce qui donne *quatre* tests de la théorie. Il est remarquable que tous ces tests ont confirmé la relativité générale. Voir Fig. 4, et, pour les références et les détails [4, 11, 12, 13], ainsi que la contribution de Michael Kramer.

Notez que, dans la Fig. 4, certains paramètres post-képlériens sont mesurés avec une précision si élevée qu’ils définissent en effet des courbes très minces dans le plan m_A, m_B . En revanche, certains d’entre eux ne sont mesurés qu’avec une précision fractionnaire peu élevée et définissent alors des “courbes épaisses”, c’est-à-dire des “bandes” dans le plan des masses (voir, par exemple, les bandes associées à \dot{P} , r et s dans le cas de PSR B1534+12). Dans tous les cas la théorie est confirmée quant toutes les bandes (épaisses ou minces) ont une intersection commune non vide. [On doit aussi noter que les bandes représentées dans la Fig. 4 n’utilisent que les barres d’erreur “à un sigma”, c’est-à-dire à 68% de niveau de confiance. Donc, le fait que la bande \dot{P} dans PSR B1534+12 est un petit peu disjointe de l’intersection des autres bandes, n’est pas significatif : une figure “à deux sigmas” montrerait un excellent accord entre l’observation et la relativité générale.]

Au vu des arguments présentés ci-dessus, tous les tests représentés dans la Fig. 4 confirment la validité de la relativité générale dans le régime des champs gravitationnels forts ($h_{\mu\nu} \sim 1$). En outre, les quatre tests utilisant des mesures du paramètre \dot{P} (dans les quatre systèmes) sont des confirmations expérimentales directes du fait que l’interaction gravitationnelle se propage à la vitesse c entre le compagnon et le pulsar. En effet, \dot{P} désigne la variation séculaire $\langle dP/dt \rangle$ de la période orbitale. Des calculs théoriques détaillés du mouvement de deux objets gravitationnellement condensés, en relativité générale, et en tenant compte des effets liés à la propagation à vitesse finie de l’interaction gravitationnelle [14], ont montré qu’un des effets observables de cette propagation était une diminution séculaire de la période orbitale donnée par la formule

$$\dot{P}^{\text{GR}}(m_A, m_B) = -\frac{192\pi}{5} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1-e^2)^{7/2}} \left(\frac{GMn}{c^3}\right)^{5/3} \frac{m_A m_B}{M^2}.$$

L’origine physique directe de cette diminution de la période orbitale est due à la modification, induite par la relativité générale, de la loi newtonienne habituelle d’attraction gravitationnelle entre deux corps : $F_{\text{Newton}} = G m_A m_B / r_{AB}^2$. Au lieu d’une telle loi simple, la relativité générale prédit une loi de force plus compliquée qui peut se développer sous la forme symbolique

$$F_{\text{Einstein}} = \frac{G m_A m_B}{r_{AB}^2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} + \frac{v^5}{c^5} + \frac{v^6}{c^6} + \frac{v^7}{c^7} + \dots \right), \quad (20)$$

⁵Dans le cas de PSR J0737–3039, l’un des six paramètres mesurés est le rapport x_A/x_B entre un paramètre képlérien du pulsar et son analogue pour le compagnon, qui se trouve être aussi un pulsar.

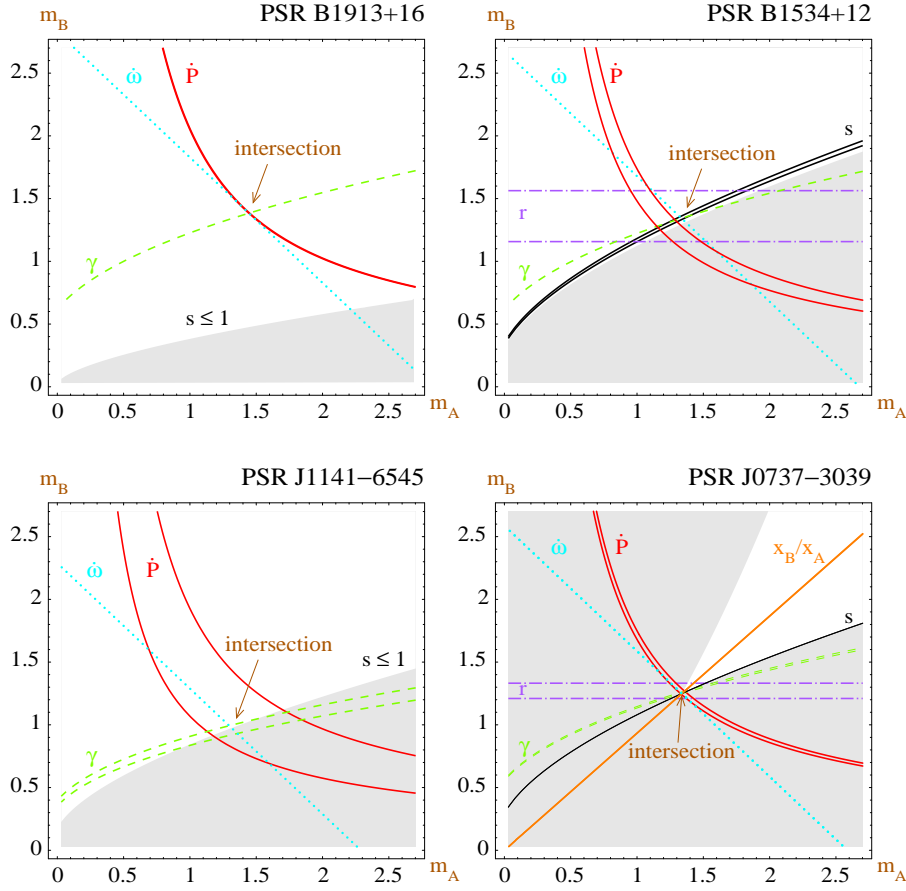


FIG. 4 – Tests de la relativité générale obtenus à partir des observations de quatre pulsars binaires. Pour chaque pulsar binaire on a tracé les “courbes”, dans le plan des deux masses ($m_A =$ masse du pulsar, $m_B =$ masse du compagnon), définies en égalant l’expression théorique, prédite par la relativité générale, de divers paramètres post-képlériens à leur valeur observationnelle, déterminée par ajustage de moindres carrés à la formule théorique paramétrisée de chronométrage. Chaque “courbe” est en fait une “bande” dont l’épaisseur est donnée par la précision (un sigma) avec laquelle le paramètre post-képlérien correspondant est mesuré. Pour certains paramètres, ces bandes sont trop fines pour être visibles. Les zones grisées correspondraient à un sinus de l’inclinaison du plan orbital par rapport au plan du ciel plus grand que 1, et sont donc physiquement exclues.

où, par exemple, “ v^2/c^2 ” représente tout un ensemble de termes d’ordre v_A^2/c^2 , v_B^2/c^2 , $v_A v_B/c^2$, ou encore $G m_A/c^2 r$ ou $G m_B/c^2 r$. Ici v_A désigne la vitesse du corps A , v_B celle du corps B et r_{AB} la distance entre les deux corps. Particulièrement important est le terme d’ordre v^5/c^5 dans l’Eq. (20). Ce terme est une conséquence directe de la propagation à vitesse finie de l’interaction gravitationnelle entre A et B , et son calcul montre qu’il contient une composante qui est opposée à la vitesse relative $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ des deux corps et qui, du coup, freine le mouvement orbital de chaque corps et le fait évoluer vers une orbite plus rapprochée de son compagnon (ayant du coup une période orbitale plus courte). Ce terme de “freinage” (qui est corrélé à l’émission d’ondes gravitationnelles) $\delta F_{\text{Einstein}} \sim v^5/c^5 F_{\text{Newton}}$ induit une diminution séculaire de la période orbitale $\dot{P}^{\text{GR}} \sim -(v/c)^5 \sim -10^{-12}$ qui est très petit, mais dont la

réalité est vérifiée avec une précision fractionnaire d'ordre 10^{-3} dans PSR B1913+16, et d'ordre 20% dans PSR B1534+12 et PSR J1141–6545 [4, 11, 13].

Pour finir cette brève évocation des tests de la gravitation relativiste dans les pulsars binaires, indiquons qu'il existe un analogue, pour le régime des champs gravitationnels forts, du formalisme de paramétrisation des déviations possibles à la relativité générale mentionné dans la Section 6 dans le cadre des champs gravitationnels faibles (paramètres post-newtoniens $\gamma - 1, \beta - 1$). Cet analogue est obtenu en considérant une famille à deux paramètres de théories relativistes de la gravitation qui diffèrent de la relativité générale en supposant que l'interaction gravitationnelle est propagée non seulement par un champ tensoriel $g_{\mu\nu}$ mais aussi par un champ scalaire φ . Une telle classe de théories tenseur-scalaires de la gravitation permet de décrire à la fois les déviations possibles dans le système solaire, et dans les pulsars binaires. Elle permet aussi de démontrer explicitement que les pulsars binaires testent bien des effets de champs forts qui vont au-delà des tests de champs faibles du système solaire en exhibant des classes de théories qui sont compatibles avec toutes les observations dans le système solaire mais qui sont incompatibles avec les observations des pulsars binaires, voir [4, 13].

10 Ondes gravitationnelles : propagation, génération et détection

Dès qu'il eut fini de construire la théorie de la relativité générale, Einstein réalisa qu'elle impliquait l'existence d'ondes de déformation de la géométrie de l'espace-temps, c'est-à-dire d'"ondes gravitationnelles" [15, 2]. Mathématiquement, ces ondes sont des analogues (avec le remplacement $A_\mu \rightarrow h_{\mu\nu}$) des ondes électromagnétiques, mais conceptuellement elles signifient quelque chose de remarquable : elles exemplifient, de la manière la plus pure possible, le caractère "élastique" de l'espace-temps en relativité générale. Avant Einstein l'espace-temps était une structure rigide, donnée a priori, et qui n'était pas influencée par le contenu matériel de l'Univers. Après Einstein, une distribution de matière (ou plus généralement de masse-énergie) qui change au cours du temps, disons pour fixer les idées un système binaire de deux étoiles à neutrons ou de deux trous noirs, va non seulement déformer la chrono-géométrie de l'espace-temps dans son voisinage immédiat, mais cette déformation va se propager dans toutes les directions à partir du système considéré et va s'éloigner à l'infini sous forme d'une onde dont les oscillations vont refléter les variations temporelles de la distribution de matière. On voit alors que l'étude de ces ondes gravitationnelles pose trois problèmes séparés : celui de la génération, celui de la propagation, et, enfin, celui de la détection d'un tel rayonnement gravitationnel. Ces trois problèmes sont activement étudiés à l'heure actuelle, car on espère détecter bientôt des ondes gravitationnelles, et pouvoir ainsi avoir des renseignements nouveaux sur l'Univers [16]. Contentons nous ici d'une introduction élémentaire à ce domaine de recherche. Pour une introduction plus détaillée à la détection des ondes gravitationnelles voir la contribution de Jean-Yves Vinet à ce séminaire Poincaré.

Considérons d'abord le cas le plus simple d'ondes gravitationnelles très faibles, et en dehors de leurs sources matérielles. La géométrie d'un tel espace-temps peut s'écrire, comme dans la Section 6, selon $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$, où $h_{\mu\nu} \ll 1$. Au premier ordre en h , et en dehors de la source (c'est-à-dire dans un domaine où $T_{\mu\nu}(x) = 0$), la perturbation de la géométrie, $h_{\mu\nu}(x)$, satisfait une équation homogène obtenue en remplaçant le second membre de l'Eq. (11) par zéro. On démontre que l'on peut simplifier cette équation par un choix adéquat du système de coordonnées. Dans un système de coordonnées dit "transverse et sans trace" (TT) les seules composantes non nulles d'une onde gravitationnelle générale sont ses composantes spatiales h_{ij}^{TT} , $i, j = 1, 2, 3$ (c'est-à-dire $h_{00}^{\text{TT}} = 0 = h_{0i}^{\text{TT}}$), et celles-ci satisfont

$$\square h_{ij}^{\text{TT}} = 0, \quad \partial_j h_{ij}^{\text{TT}} = 0, \quad h_{jj}^{\text{TT}} = 0. \quad (21)$$

La première équation (21), où apparaît l'opérateur des ondes $\square = \Delta - c^{-2} \partial_t^2$, montre que les ondes gravitationnelles se propagent (comme les ondes électromagnétiques) à la vitesse c . Si l'on considère pour simplifier une onde monochromatique plane ($h_{ij}^{\text{TT}} = \zeta_{ij} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i \omega t) + \text{c.c.}$; avec $\omega = c |\mathbf{k}|$), la deuxième équation (21) montre que le tenseur ζ_{ij} mesurant la polarisation d'une onde gravitationnelle n'a de composantes non nulles que dans le plan orthogonal à la direction de propagation de l'onde : $\zeta_{ij} k^j = 0$. Enfin, la troisième équation (21) montre que le tenseur de polarisation ζ_{ij} est à trace nulle : $\zeta_{jj} = 0$. De façon concrète, cela veut dire que si une onde gravitationnelle se propage dans la direction z , sa polarisation est décrite par une matrice 2×2 , $\begin{pmatrix} \zeta_{xx} & \zeta_{xy} \\ \zeta_{yx} & \zeta_{yy} \end{pmatrix}$, qui est symétrique et à trace nulle.

Une telle matrice de polarisation ne contient donc que deux composantes (complexes) indépendantes : $\zeta_+ \equiv \zeta_{xx} = -\zeta_{yy}$, et $\zeta_\times \equiv \zeta_{xy} = \zeta_{yx}$. C'est le même nombre de composantes (complexes) indépendantes que pour une onde électromagnétique. En effet, dans une jauge transverse, une onde électromagnétique n'a que des composantes spatiales A_i^T qui satisfont

$$\square A_i^T = 0, \quad \partial_j A_j^T = 0. \quad (22)$$

Comme ci-dessus la première équation (22) veut dire qu'une onde électromagnétique se propage à la vitesse c , et la seconde équation montre qu'une onde électromagnétique monochromatique plane ($A_i^T = \zeta_i \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i \omega t) + \text{c.c.}$; $\omega = c |\mathbf{k}|$) est décrite par un vecteur de polarisation ζ_i qui est orthogonal à la direction de propagation : $\zeta_j k^j = 0$. Pour une onde se propageant dans la direction z un tel vecteur n'a que deux composantes (complexes) indépendantes : ζ_x et ζ_y . C'est bien le même nombre de composantes que pour une onde gravitationnelle, mais on voit que les deux quantités mesurant la polarisation d'une onde gravitationnelle $\zeta_+ = \zeta_{xx} = -\zeta_{yy}$, $\zeta_\times = \zeta_{xy} = \zeta_{yx}$ sont mathématiquement très différentes des deux quantités ζ_x, ζ_y mesurant la polarisation d'une onde électromagnétique. Voir cependant le Section 11 ci-dessous. Nous avons discuté ici la propagation d'une onde gravitationnelle dans un espace-temps de fond décrit par la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. On peut aussi considérer la propagation d'une onde dans un espace-temps de fond courbe, c'est-à-dire étudier les solutions des équations d'Einstein (9) de la forme $g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}^B(x) + h_{\mu\nu}(x)$ où $h_{\mu\nu}$ est non seulement petit, mais varie sur les échelles de temps et d'espace beaucoup plus courtes que la métrique de fond $g_{\mu\nu}^B(x)$. Une telle étude est, par exemple, nécessaire pour comprendre la propagation des ondes gravitationnelles dans l'Univers cosmologique.

Le problème de la *génération* consiste à chercher le lien entre l'amplitude tensorielle h_{ij}^{TT} du rayonnement gravitationnel dans la zone d'ondes, et le mouvement et la structure de la source. Si l'on considère le cas le plus simple d'une source suffisamment peu condensée pour n'engendrer que des ondes partout faibles ($g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \ll 1$), on peut utiliser l'approximation linéarisée des équations d'Einstein (9), c'est-à-dire les équations (11). On peut résoudre les équations (11) par la même technique utilisée pour résoudre les équations de Maxwell (12) : on fixe le système de coordonnées en imposant $\partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\alpha^\alpha = 0$ (analogue de la condition de jauge de Lorentz $\partial^\alpha A_\alpha = 0$), puis on inverse l'opérateur des ondes en utilisant les potentiels retardés. Enfin, on doit étudier la forme asymptotique, à l'infini, de l'onde émise, et la mettre sous la forme réduite d'une amplitude transverse et sans trace h_{ij}^{TT} satisfaisant les Eqs. (21) (analogue à une onde électromagnétique transverse A_i^T satisfaisant (22)). On trouve alors que, de même que la conservation de la charge implique qu'il n'y a pas d'émission électrique de type monopolaire, mais seulement dipolaire ou d'un ordre de polarité plus élevé, de même la conservation de l'énergie-impulsion implique l'absence de rayonnements gravitationnels monopolaires *et* dipolaires. Pour une source lentement variable ($v/c \ll 1$), le rayonnement gravitationnel dominant est de type "quadrupolaire". Il est donné, dans la zone d'ondes, par une expression de la forme

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, r, \mathbf{n}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [I_{ij}(t - r/c)]^{\text{TT}}. \quad (23)$$

Ici r désigne la distance au centre de masse de la source, $I_{ij}(t) \equiv \int d^3x c^{-2} T^{00}(t, \mathbf{x}) (x^i x^j - \frac{1}{3} \mathbf{x}^2 \delta^{ij})$ le moment quadrupolaire de la distribution de masse-énergie, et l'indice supérieur TT désigne une opération algébrique de projection du tenseur quadrupolaire I_{ij} (qui est une matrice 3×3) qui n'en retient que la partie orthogonale à la direction de propagation locale de l'onde $n^i \equiv x^i/r$, et sans trace (I_{ij}^{TT} est donc, localement, une matrice 2×2 symétrique et sans trace du même type que ζ_{ij} ci-dessus). La formule (23) (qui a essentiellement été obtenue par Einstein en 1918 [15]) n'est que la première approximation d'un développement en puissances de v/c , où v désigne une vitesse interne caractéristique de la source. La perspective de pouvoir détecter bientôt des ondes gravitationnelles ont motivé les théoriciens à améliorer la formule (23) : (i) en décrivant les termes d'ordre supérieur en v/c , jusqu'à un ordre très élevé, et (ii) en utilisant de nouvelles méthodes d'approximation permettant de traiter des sources contenant des régions de champs gravitationnels forts (comme, par exemple, un système binaire de deux trous noirs ou deux étoiles à neutrons). Voir ci-dessous pour des résultats très récents.

Enfin, le problème de la *détection*, dont le pionnier fut Joseph Weber dans les années soixante, suscite de nos jours de très actives recherches expérimentales. Le principe de tous les détecteurs est qu'une onde gravitationnelle d'amplitude h_{ij}^{TT} induit, lors de son passage, un changement de la distance L entre deux corps de l'ordre de $\delta L \sim hL$. Une façon de voir ceci est de considérer l'action d'une onde h_{ij}^{TT} sur deux particules libres, au repos avant l'arrivée de l'onde aux positions x_1^i et x_2^i respectivement. Comme on l'a vu chaque particule, en présence de l'onde, va suivre un mouvement géodésique dans la géométrie $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (avec $h_{00} = h_{0i} = 0$ et $h_{ij} = h_{ij}^{\text{TT}}$). En écrivant l'équation des géodésiques, Eq. (7), on trouve qu'elle se réduit simplement (au premier ordre en h) à $d^2 x^i / ds^2 = 0$. Donc, des particules initialement au repos ($\dot{x}^i = \text{const.}$) restent au repos dans un système de coordonnées transverse et sans trace! Cela ne veut cependant pas dire que l'onde gravitationnelle n'a aucun effet observable. En effet, comme la géométrie spatiale est perturbée par le passage de l'onde, $g_{ij}(t, \mathbf{x}) = \delta_{ij} + h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x})$, on trouve que la distance physique entre les deux particules x_1^i, x_2^i (observable, par exemple, en mesurant le temps d'aller retour de la lumière entre les deux particules) varie, lors du passage de l'onde, selon $L^2 = (\delta_{ij} + h_{ij}^{\text{TT}})(x_2^j - x_1^j)(x_2^i - x_1^i)$.

Le problème de la détection d'une onde gravitationnelle est ainsi ramené au problème de détecter un petit déplacement relatif $\delta L/L \sim h$. En utilisant la formule (23), on trouve que l'ordre de grandeur de h , pour les sources astrophysiques connues ou espérées (par exemple, système très rapproché de deux étoiles à neutrons ou deux trous noirs), situées à des distances telles qu'on puisse espérer voir plusieurs événements par an ($r \gtrsim 600$ millions d'années lumière), est vraiment extrêmement petit : $h \lesssim 10^{-22}$ pour des signaux dont la fréquence caractéristique est d'une centaine de Hertz. Plusieurs types de détecteurs ont été développés depuis les travaux pionniers de J. Weber [16]. A l'heure actuelle, les détecteurs qui devraient réussir dans le futur proche à détecter des amplitudes $h \sim \delta L/L \sim 10^{-22}$ sont de grands interféromètres, du type Michelson ou Fabry-Pérot, ayant des bras kilométriques et dans lesquels est injecté un faisceau laser monochromatique très puissant. De tels détecteurs interférométriques terrestres existent actuellement aux U.S.A. (détecteurs LIGO [17]), en Europe (détecteurs VIRGO [18] et GEO 600 [19]) et ailleurs (comme le détecteur TAMA au Japon). En outre, le projet spatial international LISA [20], constitué d'un interféromètre entre satellites distants de plusieurs millions de kilomètres, devrait permettre, dans une dizaine d'années, de détecter des ondes gravitationnelles de basse fréquence (\sim centième ou millième de Hertz). L'ensemble de ces détecteurs d'ondes gravitationnelles promet d'apporter des renseignements inestimables pour l'astronomie en ouvrant sur l'Univers une nouvelle "fenêtre" beaucoup plus transparente que les diverses "fenêtres" électromagnétiques (ou neutriniques) qui ont tant renouvelé notre connaissance de l'Univers au vingtième siècle.

L'extrême petitesse des signaux gravitationnels attendus a conduit de nombreux expérimentateurs à dépenser, depuis de nombreuses années, des trésors d'ingénuité et de savoir-faire pour développer des technologies assez précises et fiables (voir [17, 18, 19, 20]). Pour finir, indiquons aussi que de grands efforts théoriques sont dépensés, à la fois pour calculer les prédictions de la relativité générale pour les ondes gravitationnelles émises par certaines sources, et pour développer des méthodes adaptées d'extraction du signal gravitationnel du bruit de fond présent dans les détecteurs. Par exemple, l'une des sources les plus prometteuses pour les détecteurs terrestres est le train d'ondes gravitationnelles émis par un système de deux trous noirs, et notamment la partie finale (la plus intense) de ce train d'ondes, qui est émise dans les dernières orbites de ce système, et lors de la coalescence finale des deux trous noirs pour former un seul trou noir plus massif. On a vu ci-dessus (voir Section 9) que la propagation à la vitesse finie de l'interaction gravitationnelle entre les deux corps d'un système binaire donne lieu à une accélération progressive de la fréquence orbitale, liée à un rapprochement progressif des deux corps. On parle ici des étapes finales d'un tel processus où les deux corps sont si rapprochés qu'ils orbitent l'un autour de l'autre, dans un mouvement de spirale qui s'accélère jusqu'à atteindre (pour les dernières orbites "stables") des vitesses qui deviennent comparables à la vitesse de la lumière, tout en lui restant cependant légèrement inférieures. Pour pouvoir déterminer, dans une telle situation, et avec une précision acceptable pour les besoins de la détection, la dynamique d'un système de deux trous noirs, et l'amplitude gravitationnelle h_{ij}^{TT} qu'il émet, il a fallu développer à un très haut niveau de précision tout un ensemble de techniques analytiques. Par exemple, il a fallu calculer le développement (20) de la force déterminant le mouvement des deux corps à un ordre très élevé et calculer aussi l'amplitude h_{ij}^{TT} du rayonnement gravitationnel émis à l'infini avec une précision allant bien au-delà de l'approximation du quadrupole (23). Ces calculs sont comparables en complexité aux calculs d'ordres élevés en Théorie Quantique des Champs. Certaines techniques développées pour la théorie quantique des champs se sont d'ailleurs révélées être très utiles pour ces calculs de la théorie (classique) de la relativité générale (comme certaines méthodes de resommation, et l'utilisation mathématique d'un prolongement analytique dans la dimension de l'espace-temps). Pour une entrée dans la littérature de ces méthodes analytiques modernes voir [21], et pour un exemple de résultat d'intérêt physique direct pour la détection obtenu par de telles méthodes voir la Fig. 5 [22] qui représente une composante de l'amplitude gravitationnelle $h_{ij}^{\text{TT}}(t)$ émise par les étapes ultimes de l'évolution d'un système de deux trous noirs de même masse. Les premières oscillations représentées sur la Fig. 5 sont émises par les dernières orbites quasi-circulaires (mouvement accéléré en spirale de rayon décroissant). Le milieu du signal correspond à une phase où, ayant traversé la dernière orbite stable, les deux trous noirs "tombent" en spiralant rapidement l'un vers l'autre. En effet, contrairement à la théorie de Newton qui prédit que deux corps condensés pourraient orbiter l'un autour de l'autre sur une orbite de rayon arbitrairement petit (essentiellement jusqu'à ce que les corps se touchent), la théorie d'Einstein prédit une loi de force modifiée entre les deux corps, Eq. (20), dont l'analyse montre qu'elle est si attractive qu'elle ne permet plus l'existence d'orbites circulaires stables quand la distance entre les deux corps devient inférieure à environ $6G(m_A + m_B)/c^2$. Dans le cas de deux trous noirs, cette distance est assez supérieure aux "rayons" des trous noirs ($2Gm_A/c^2$ et $2Gm_B/c^2$) pour pouvoir encore traiter analytiquement le début de la "chute en spirale" des deux trous noirs l'un vers l'autre. Les dernières oscillations sur la Fig. 5 sont émises par le trou noir tournant (initialement très déformé) formé par la "fusion" des deux trous noirs séparés en un seul trou noir final.

Jusqu'à très récemment les prédictions analytiques, illustrées sur la Fig. 5, concernant le signal gravitationnel $h(t)$ émis par la "chute en spirale" et la "fusion" de deux trous noirs restaient conjecturaux car on ne pouvait les comparer ni à d'autres

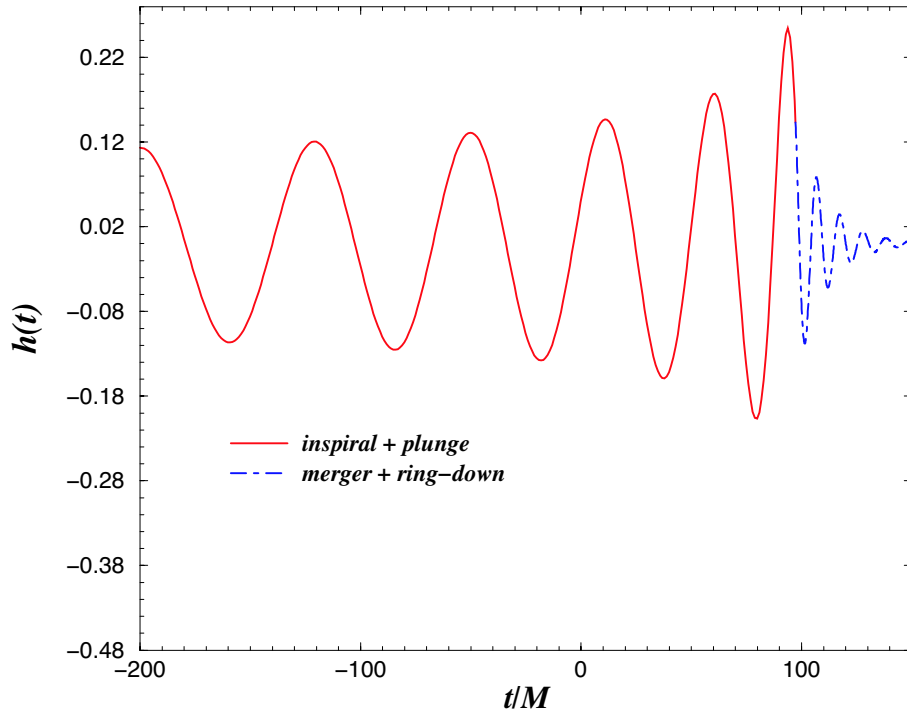


FIG. 5 – Amplitude gravitationnelle $h(t)$ émise par les étapes ultimes de l'évolution d'un système de deux trous noirs de même masse. Le début (à gauche de la figure) du signal (qui est sinusoïdal) correspond à un mouvement en spirale, de rayon décroissant, de deux trous noirs séparés; le milieu correspond à une “chute en spirale” rapide des deux trous noirs l'un vers l'autre; la fin (à droite) correspond aux “oscillations” du trou noir tournant unique final formé par la “fusion” des deux trous noirs initiaux.

prédictions théoriques, ni à des données observationnelles. Récemment, les efforts déployés depuis une trentaine d'années dans le monde pour attaquer le problème de la coalescence de deux trous noirs en résolvant les équations d'Einstein (9) de façon *numérique* ont commencé à porter leurs fruits. Plusieurs groupes ont pu calculer numériquement le signal $h(t)$ émis par les dernières orbites et la fusion de deux trous noirs [23]. Pour l'essentiel, il y a un bon accord entre les prédictions analytiques et les prédictions numériques. Pour pouvoir détecter les ondes gravitationnelles émises par la coalescence de deux trous noirs, il sera sans doute nécessaire de combiner de façon adéquate les informations sur la structure du signal $h(t)$ obtenues par les deux types de méthodes, qui sont en fait complémentaires.

11 Relativité générale et théorie quantique : de la supergravité à la théorie des cordes

Nous n'avons discuté jusqu'ici que la relativité générale *classique*, c'est-à-dire en négligeant tout effet quantique. Que devient la théorie dans le régime quantique? Cette question, d'apparence innocente, ouvre en fait des perspectives très vastes dont l'étude est encore en plein chantier. Nous ne ferons ici que l'effleurer, en indiquant au lecteur quelques chemins sur lesquels le défi d'unifier relativité générale et théorie quantique a entraîné la physique théorique contemporaine. On consultera la contribution d'Ignatios Antoniadis à ce séminaire Poincaré pour une introduction

plus complète aux divers “au delà” possibles de la relativité générale suggérés par le cadre en construction de la “théorie des cordes”.

Rappelons que, dès les débuts de la formulation quasi-définitive de la théorie quantique (1925–1930), les créateurs de la mécanique quantique (Born, Heisenberg, Jordan; Dirac; Pauli; ...) montrèrent comment “quantifier” non plus des systèmes de plusieurs particules (comme un atome), mais des *champs*, c'est-à-dire des systèmes dynamiques continus, dont la description classique implique une distribution continue d'énergie et d'impulsion dans l'espace. Ils montrèrent en particulier comment *quantifier* (c'est-à-dire formuler dans un cadre compatible avec la théorie quantique) le champ électromagnétique A_μ , dont nous avons rappelé plus haut qu'il satisfaisait, au niveau classique, les équations de Maxwell (12). Ils rencontrèrent cependant une difficulté due au fait suivant. En théorie quantique, la physique de l'évolution d'un système est essentiellement contenue dans les *amplitudes de transition* $A(f, i)$ entre un état initial étiqueté par i , et un état final étiqueté par f . Ces quantités $A(f, i)$ sont des nombres complexes. Elles satisfont une propriété de “transitivité” du type

$$A(f, i) = \sum_n A(f, n) A(n, i), \quad (24)$$

qui contient une somme sur tous les états intermédiaires possibles, étiquetés par n (cette somme devenant une intégrale quand il y a un continuum d'états intermédiaires possibles). R. Feynman a utilisé l'Eq. (24) comme point de départ d'une nouvelle formulation de la théorie quantique, en l'interprétant comme un analogue du *principe de Huyghens* : si l'on conçoit $A(f, i)$ comme l'amplitude, “au point f ”, d'une “onde” émise “au point i ”, l'Eq. (24) exprime que cette amplitude peut se calculer en considérant que l'“onde” émise par i passe par tous les “points” intermédiaires possibles n ($A(n, i)$), en réémettant des “ondelettes” à partir de ces points intermédiaires ($A(f, n)$) qui se superposent ensuite pour former l'onde totale arrivant au “point final f ”.

La propriété (24) ne pose pas de problème dans la mécanique quantique des systèmes discrets (systèmes de particules). Elle indique simplement que l'amplitude $A(f, i)$ se comporte comme une onde, et donc doit satisfaire une “équation d'ondes” (ce qui est bien le cas de l'équation de Schrödinger décrivant la dépendance de $A(f, i)$ par rapport aux paramètres décrivant la configuration finale f). En revanche, la propriété (24) pose des problèmes redoutables quand on l'applique à la quantification des systèmes dynamiques continus (champs). En effet, pour de tels systèmes l'“espace” des états intermédiaires possibles est infiniment plus vaste que dans le cas de la mécanique des systèmes discrets. Grosso modo, les états intermédiaires possibles pour un champ peuvent être décrits comme contenant $\ell = 1, 2, 3, \dots$ excitations quantiques du champ, chaque excitation quantique (ou paire de “particules virtuelles”) étant essentiellement décrite par une onde plane, $\zeta \exp(i k_\mu x^\mu)$, où ζ mesure la polarisation de ces particules virtuelles, et $k^\mu = \eta^{\mu\nu} k_\nu$, avec $k^0 = \omega$, $k^i = \mathbf{k}$, leur fréquence angulaire et vecteur d'onde, ou (en utilisant les relations de Planck-Einstein-de Broglie $E = \hbar \omega$, $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$) leur impulsion-énergie $p^\mu = \hbar k^\mu$. La théorie quantique montre que (essentiellement à cause du principe d'incertitude) les quadri-fréquences (et quadri-impulsions) $p^\mu = \hbar k^\mu$ des états intermédiaires ne peuvent pas être contraints à satisfaire l'équation classique $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2$ (c'est-à-dire $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$; on utilise $c = 1$ dans cette Section). En conséquence, la somme sur les états intermédiaires, pour la théorie quantique d'un champ, contient (entre autres) : (i) quand $\ell = 1$ (état intermédiaire contenant seulement une paire de particules virtuelles, dit “contribution à une boucle”), une intégrale sur une quadri-impulsion p^μ , $\int d^4 p = \int dE \int d\mathbf{p}$; (ii) quand $\ell = 2$ (deux paires de particules virtuelles; “contribution à deux boucles”), une intégrale sur deux quadri-impulsions p_1^μ, p_2^μ , $\int d^4 p_1 d^4 p_2$; etc ... Le point délicat vient du fait que les énergies-impulsions des états intermédiaires peuvent prendre des valeurs arbitrairement élevées. Cette possibilité est directement reliée (par transformée de Fourier) au

fait qu'un champ possède un nombre infini de degrés de liberté, correspondant à des configurations qui varient sur des échelles de temps et d'espace arbitrairement petites.

Les problèmes posés par la nécessité d'intégrer sur le domaine infini des quadri-impulsions des particules virtuelles intermédiaires (c'est-à-dire de tenir compte du fait que les configurations d'un champ peuvent varier sur des échelles arbitrairement petites) apparurent dès les années trente quand on étudia en détail la théorie quantique du champ électromagnétique A_μ (dite électrodynamique quantique, ou QED en anglais). Ces problèmes se posaient sous la forme suivante : quand on calculait l'amplitude de transition pour des états initiaux et finals donnés (par exemple la collision de deux particules de lumière, deux photons entrants, en deux photons sortants) en utilisant (24), on trouvait un résultat donné sous la forme d'une *intégrale divergente*, à cause de l'intégrale (à l'approximation d'une boucle, $\ell = 1$) sur l'énergie-impulsion arbitrairement grande décrivant les paires électrons-positrons virtuelles apparaissant comme états intermédiaires possibles. Petit à petit, les physiciens théoriciens comprirent que le type d'intégrales divergentes apparaissant en QED était relativement bénin, et, après la seconde guerre mondiale, ils développèrent une méthode (*théorie de la renormalisation*) permettant d'isoler de façon non ambiguë la partie infinie de ces intégrales, et de la soustraire en exprimant les amplitudes $A(f, i)$ seulement en fonction de quantités directement observables [24] (travaux de J. Schwinger, R. Feynman, F. Dyson etc ...)

Les travaux précédents ont conduit à développer des théories quantiques cohérentes non seulement du champ électromagnétique A_μ (QED), mais aussi des généralisations de l'électromagnétisme (théorie de Yang-Mills ou théorie de jauge non-abélienne) qui se révélèrent fournir d'excellentes descriptions des nouvelles interactions entre particules élémentaires découvertes au vingtième siècle (théorie électrofaible unifiant partiellement électromagnétisme et interactions faibles, chromodynamique quantique décrivant les interactions fortes). Toutes ces théories ne donnent lieu qu'à des divergences relativement bénignes, qui peuvent être "renormalisées" et conduire ainsi à calculer les amplitudes $A(f, i)$ correspondant à des processus physiques observables [24] (travaux, notamment, de G. 't Hooft et M. Veltman).

Que se passe-t-il quand on utilise (24) pour construire une théorie quantique "perturbative" (c'est-à-dire obtenue en développant selon le nombre ℓ des paires de particules virtuelles apparaissant dans les états intermédiaires) de la relativité générale? La réponse est que les intégrales sur les quadri-impulsions des particules virtuelles intermédiaires ne sont plus du tout du type bénin qui permettait de les renormaliser dans le cas plus simple de l'électromagnétisme. La cause de cette différence n'est pas accidentelle mais est liée à la physique essentielle de la gravitation relativiste. En effet, les particules virtuelles ont, comme on l'a dit, des énergies E arbitrairement élevées. A cause des relations de base qui conduisirent Einstein à développer la relativité générale, c'est-à-dire $E = m_i$ et $m_i = m_g$, on en déduit que ces particules virtuelles correspondent à des masses gravitationnelles m_g arbitrairement grandes. Elles vont donc finir par créer des effets gravitationnels intenses, et de plus en plus intenses quand le nombre ℓ de paires de particules virtuelles augmente. Ces interactions gravitationnelles qui croissent sans limite avec l'énergie et l'impulsion, correspondent (par transformée de Fourier) à des configurations de champ concentrées dans des échelles de temps et d'espace arbitrairement petites. Une façon de voir pourquoi le champ gravitationnel quantique crée des problèmes beaucoup plus violents que le champ électromagnétique quantique est, tout simplement, de recourir à l'analyse dimensionnelle. Des considérations simples montrent en effet que l'amplitude relative (non dimensionnée) à une boucle A_1 doit être proportionnelle au produit $\hbar G$ et doit contenir une intégrale $\int d^4k$. Or, dès 1900, Planck avait remarqué que (en unités où $c = 1$) les dimensions de \hbar et G étaient telles que le produit $\hbar G$ avait les dimensions

d'une longueur (ou d'un temps) au carré

$$\ell_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}, \quad t_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \simeq 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}. \quad (25)$$

On en déduit que l'intégrale $\int d^4k f(k)$ doit avoir les dimensions d'une fréquence au carré, et donc que A_1 doit (quand $k \rightarrow \infty$) être du type, $A_1 \sim \hbar G \int d^4k/k^2$. Une telle intégrale diverge quadratiquement avec la borne supérieure Λ de l'intégrale (fréquence de coupure $|k| \leq \Lambda$), d'où $A_1 \sim \hbar G \Lambda^2 \sim t_P^2 \Lambda^2$. L'extension de cette analyse dimensionnelle aux états intermédiaires à plusieurs boucles ($\ell > 1$) fait apparaître des divergences polynomiales encore plus sévères, et d'un type tel que la puissance de Λ qui apparaît croît sans limite avec ℓ .

En conclusion, les caractéristiques physiques essentielles de la gravitation ($E = m_i = m_g$, et la dimension de la constante de Newton G) impliquent l'impossibilité de généraliser au cas gravitationnel les méthodes qui ont permis un développement satisfaisant d'une théorie quantique des autres interactions (électromagnétiques, faibles et fortes). Plusieurs voies ont été explorées pour sortir de cette impasse. Certaines essaient de quantifier la relativité générale de façon non perturbative, c'est-à-dire sans utiliser un développement en états intermédiaires (24) (travaux d'A. Ashtekar, L. Smolin et d'autres). Certaines ont essayé de généraliser la relativité générale en ajoutant au champ gravitationnel einsteinien (bosonique) $g_{\mu\nu}(x)$ un champ à caractère fermionique, le champ gravitinique $\psi_\mu(x)$. Il est en effet remarquable qu'il soit possible de définir une théorie, dite de la *supergravité*, qui généralise de façon profonde l'invariance géométrique de la relativité générale. Après la découverte en 1974 (par J. Wess et B. Zumino) d'une nouvelle symétrie globale possible pour des champs bosoniques et fermioniques en interaction, la *supersymétrie* (qui est une sorte de rotation globale transformant bosons en fermions et réciproquement), D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen et S. Ferrara, et S. Deser et B. Zumino, montrèrent que l'on pouvait généraliser la supersymétrie globale en une *supersymétrie locale*, c'est-à-dire variable de point en point dans l'espace-temps. La supersymétrie locale est une sorte de généralisation fermionique (c'est-à-dire avec paramètres anti-commutants) de l'invariance géométrique de base de la relativité générale (invariance sous tous les changements de coordonnées). La généralisation de la théorie de la gravitation d'Einstein qui admet une telle supersymétrie locale s'appelle *théorie de la supergravité*. Comme on l'a dit, en quatre dimensions, cette théorie contient en plus du champ bosonique (commutant) $g_{\mu\nu}(x)$, un champ fermionique (anticommutant) $\psi_\mu(x)$ qui est à la fois un vecteur d'espace-temps (indice μ) et un spineur. [C'est un champ sans masse de spin 3/2, intermédiaire entre un champ sans masse de spin 1 comme A_μ , et un champ sans masse de spin 2 comme $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$.] La supergravité fut étendue à des structures fermioniques plus riches (multi-gravitiniques), et fut formulée dans des espace-temps ayant plus que quatre dimensions. Il est d'ailleurs remarquable qu'il existe une dimension maximale, égale à $D = 11$, admettant la formulation d'une théorie de la supergravité (supergravité maximale construite par E. Cremmer, B. Julia et J. Scherk). L'espoir initial sous-tendant la construction de ces théories de la supergravité était qu'elles allaient peut être permettre de donner un sens au calcul perturbatif (24) des amplitudes quantiques. En effet, on trouve par exemple qu'à une boucle, $\ell = 1$, les contributions venant des états intermédiaires fermioniques ont le signe opposé des contributions bosoniques et (à cause de la supersymétrie bosons \leftrightarrow fermions) les compensent exactement. Malheureusement, bien que de telles compensations existent pour les premiers ordres d'approximation, on se convainc petit à petit que cela n'allait pas être le cas à tous les ordres. Le fait que la constante d'interaction gravitationnelle G ait "une mauvaise dimension" reste vrai et crée des divergences non renormalisables à partir d'un certain nombre de boucles ℓ .

Pendant ce temps, une troisième voie pour définir une théorie quantique cohérente de la gravitation s'est développée, sous le nom de *théorie des cordes*. Initia-

lement formulées (notamment par G. Veneziano, M. Virasoro, P. Ramond, A. Neveu et J.H. Schwarz) comme modèles des interactions fortes, les théories des cordes sont fondées sur la quantification de la dynamique relativiste d'un objet étendu selon une dimension spatiale : une "corde". Cette corde peut être refermée sur elle-même, comme un petit ruban élastique (corde fermée), ou elle peut avoir deux extrémités (corde ouverte). Notons que le point de départ de la théorie des cordes ne comprend que l'espace-temps de Poincaré-Minkowski, c'est-à-dire la métrique $\eta_{\mu\nu}$ de l'Eq. (2), et la théorie quantique (avec la constante $\hbar = h/2\pi$). En particulier, la seule symétrie manifeste de la dynamique classique d'une corde est le groupe de Poincaré (3). Il est cependant remarquable que (comme l'ont montré T. Yoneya, et J. Scherk et J.H. Schwarz, en 1974) l'une des excitations quantiques d'une corde fermée reproduit, quand on prend une certaine limite, toute la structure non-linéaire de la relativité générale [voir ci-dessous]. Parmi les autres propriétés remarquables de la théorie des cordes [25] signalons qu'elle est la première théorie physique à déterminer la dimension D de l'espace-temps. En effet, cette théorie n'est cohérente que si $D = 10$, pour ses versions admettant des excitations fermioniques (la théorie des cordes purement bosonique sélectionne $D = 26$). Le fait que $10 > 4$ ne signifie pas que cette théorie n'a pas de pertinence au monde réel. En effet, on sait depuis les années vingt (travaux de T. Kaluza et O. Klein) qu'un espace-temps de dimension $D > 4$ est compatible avec l'expérience si les dimensions (spatiales) supplémentaires se referment sur elles-mêmes (c'est-à-dire sont "compactifiées") sur des échelles de distance très petites. La physique à basse énergie d'une telle théorie semble se dérouler dans un espace-temps à 4 dimensions, mais elle contient de nouveaux champs (a priori sans masse) liés à la géométrie des dimensions supplémentaires compactifiées. En outre, des travaux récents (dus, notamment, à I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et G. Dvali) ont suggéré la possibilité que les dimensions supplémentaires soient compactifiées sur des échelles de distances petites par rapport à la vie de tous les jours, mais très grandes par rapport à la longueur de Planck. Cette possibilité ouvre tout un domaine phénoménologique pour l'observation éventuelle de signaux venant de la théorie des cordes (voir la contribution d'I. Antoniadis à ce séminaire Poincaré).

Mais la propriété la plus remarquable de la théorie des cordes est qu'elle semble éviter d'une manière radicale les problèmes d'intégrales divergentes (non renormalisables) qui grèvent tout essai direct de quantifier la gravitation de façon perturbative. Pour expliquer comment la théorie des cordes arrive à un tel résultat, il nous faut exposer quelques éléments du formalisme de la théorie des cordes.

Rappelons que la dynamique classique de tout système s'obtient en minimisant une fonctionnelle de l'évolution au cours du temps de la configuration du système, appelée *action* (principe de moindre action). Par exemple, l'action pour une particule de masse m , évoluant dans un espace-temps riemannien (6), est proportionnelle à la longueur de la ligne qu'elle trace dans l'espace-temps : $S = -m \int ds$. Cette action est minimisée quand la particule suit une géodésique, c'est-à-dire quand son équation du mouvement est donnée par (7). D'après Y. Nambu et T. Goto, l'action pour une corde est $S = -T \iint dA$, où le paramètre T (analogue à m pour la particule) s'appelle la *tension* de la corde, et où $\iint dA$ est l'aire de la surface (à deux dimensions) tracée par l'évolution de la corde dans l'espace-temps (à D dimensions) dans lequel elle vit. En théorie quantique, la fonctionnelle d'action sert (comme l'a montré R. Feynman) pour définir l'amplitude de transition (24). Essentiellement, quand on considère deux configurations intermédiaires (au sens du membre de droite de (24)) m et n proches l'une de l'autre, l'amplitude $A(n, m)$ est proportionnelle à $\exp(i S(n, m)/\hbar)$ où $S(n, m)$ est l'action classique minimale pour que le système considéré aille de la configuration étiquetée par n à celle étiquetée par m . Généralisant la décomposition (24) en introduisant une infinité de configurations intermédiaires proches l'une de l'autre, on finit par exprimer (dans une généralisation du principe de Huyghens) l'amplitude $A(f, i)$ comme une somme multiple sur tous les "chemins" (dans l'espace de configuration du

système étudié) faisant passer de l'état initial i à l'état final f . Chaque chemin contribue un terme $e^{i\phi}$ où la phase $\phi = S/\hbar$ est proportionnelle l'action S correspondant à ce "chemin", c'est-à-dire à cette évolution possible du système. En théorie des cordes $\phi = -(T/\hbar) \iint dA$. La phase étant une quantité non dimensionnée, et $\iint dA$ ayant la dimension d'une aire, on voit que la théorie quantique des cordes fait intervenir à un niveau fondamental une quantité, \hbar/T , ayant les dimensions d'une longueur au carré. Plus précisément on appelle longueur fondamentale de la théorie des cordes, ℓ_s , la quantité définie par

$$\ell_s^2 \equiv \alpha' \equiv \frac{\hbar}{2\pi T}. \quad (26)$$

Cette longueur fondamentale intervient de façon centrale en théorie des cordes. Grosso modo, elle définit la "taille" des états quantiques d'une corde. Si ℓ_s est beaucoup plus petit que la résolution observationnelle avec laquelle on étudie une corde, et ses interactions, la corde apparaîtra comme une particule ponctuelle, et ses interactions seront décrites par une théorie quantique de particules relativistes, qui est équivalente à une théorie de champs relativistes. C'est précisément en ce sens que la relativité générale émerge comme une limite de la théorie des cordes. Comme il s'agit d'un point conceptuel important pour notre propos, donnons quelques détails sur cette émergence de la relativité générale à partir de la théorie des cordes.

La fonctionnelle d'action qui est utilisée en pratique pour quantifier une corde n'est pas vraiment $-T \iint dA$ mais plutôt (comme l'a souligné A. Polyakov)

$$\frac{S}{\hbar} = -\frac{1}{4\pi\ell_s^2} \iint d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + \dots, \quad (27)$$

où σ^a , $a = 0, 1$ sont deux coordonnées servant à repérer un événement sur la surface d'espace-temps tracée par la corde dans l'espace-temps ambiant; γ_{ab} est une métrique auxiliaire ($d\Sigma^2 = \gamma_{ab}(\sigma) d\sigma^a d\sigma^b$) définie sur cette surface (γ^{ab} étant son inverse, et γ son déterminant); et $X^\mu(\sigma^a)$ définit le plongement de la corde dans l'espace-temps (plat) ambiant. Les points de suspension indiquent des termes supplémentaires, et notamment des termes du type fermionique qui ont été introduits par P. Ramond, par A. Neveu et J.H. Schwarz, et par d'autres. Si l'on sépare les deux coordonnées $\sigma^a = (\sigma^0, \sigma^1)$ en coordonnée temporelle, $\tau \equiv \sigma^0$, et coordonnée spatiale $\sigma \equiv \sigma^1$, la configuration à un "moment τ " de la corde est décrite par des fonctions $X^\mu(\tau, \sigma)$, où l'on peut penser que σ est une abscisse curviligne décrivant l'extension spatiale de la corde. Si l'on considère une corde fermée, c'est-à-dire topologiquement équivalente à un cercle, la fonction $X^\mu(\tau, \sigma)$ doit être périodique en σ . On démontre que (modulo l'imposition de certaines contraintes) on peut choisir les coordonnées τ et σ sur la corde de sorte que $d\Sigma^2 = -d\tau^2 + d\sigma^2$. Alors les équations de la dynamique de la corde (obtenues en minimisant l'action (27)) se réduisent à l'équation habituelle des ondes sur une corde : $-\partial^2 X^\mu / \partial \tau^2 + \partial^2 X^\mu / \partial \sigma^2 = 0$. La solution générale de cette équation décrit une superposition d'ondes se déplaçant le long de la corde dans les deux sens possibles : $X^\mu = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$. Si l'on considère une corde fermée (c'est-à-dire topologiquement équivalente à un cercle), ces deux types d'ondes sont indépendants l'un de l'autre. Pour une corde ouverte (avec certaines conditions de réflexion aux extrémités de la corde) ces deux types d'ondes sont reliés l'un à l'autre. De plus, comme, dans les deux cas, la corde à une longueur finie, on peut décomposer les ondes progressives $X_L^\mu(\tau + \sigma)$ ou $X_R^\mu(\tau - \sigma)$ en série de Fourier. Par exemple, on peut écrire pour une corde fermée

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_0^\mu(\tau) + \frac{i}{\sqrt{2}} \ell_s \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^\mu}{\sqrt{n}} e^{-2in(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{a}_n^\mu}{\sqrt{n}} e^{-2in(\tau+\sigma)} \right) + \text{h.c.} \quad (28)$$

Ici $X_0^\mu(\tau) = x^\mu + 2\ell_s^2 p^\mu \tau$ désigne le mouvement du centre de masse de la corde, et le reste désigne la décomposition du mouvement autour du centre de masse en

un ensemble discret de modes d'oscillation. Comme toute corde qui vibre, une corde relativiste peut vibrer dans son mode fondamental ($n = 1$) ou dans une "harmonique" du mode fondamental (entier $n > 1$). Dans le cas classique les coefficients complexes a_n^μ, \tilde{a}_n^μ représentent les amplitudes (complexes) de vibration des modes d'oscillation de fréquence n fois le mode fondamental. [a_n^μ correspondant à une onde se déplaçant vers la droite, alors que \tilde{a}_n^μ correspond à une onde se déplaçant vers la gauche.] Quand on quantifie la dynamique de la corde la position de la corde $X^\mu(\tau, \sigma)$ devient un opérateur (agissant dans l'espace des états quantiques du système), et du coup les quantités x^μ, p^μ, a_n^μ et \tilde{a}_n^μ dans (28) deviennent des opérateurs. La notation h.c. signifie que l'on doit ajouter les conjugués hermitiens des termes d'oscillations, qui vont contenir les opérateurs $(a_n^\mu)^\dagger$ et $(\tilde{a}_n^\mu)^\dagger$. [La notation \dagger indique une conjugaison hermitienne, c'est à dire l'analogue, au niveau des opérateurs, de la conjugaison complexe.] On trouve alors que les opérateurs x^μ, p^μ décrivant le mouvement du centre de masse satisfont les relations de commutation habituelles d'une particule relativiste, $[x^\mu, p^\mu] = i \hbar \eta^{\mu\nu}$, et que les opérateurs a_n^μ et \tilde{a}_n^μ deviennent des opérateurs d'annihilation, comme ceux qui apparaissent dans la théorie quantique de tout système vibrant : $[a_n^\mu, (a_m^\nu)^\dagger] = \hbar \eta^{\mu\nu} \delta_{nm}, [\tilde{a}_n^\mu, (\tilde{a}_m^\nu)^\dagger] = \hbar \eta^{\mu\nu} \delta_{mn}$. Dans le cas d'une corde ouverte, on a seulement un jeu d'oscillateurs, disons a_n^μ . La discussion jusqu'ici a négligé de préciser que les amplitudes d'oscillations a_n^μ, \tilde{a}_n^μ devaient satisfaire un nombre infini de contraintes (liées à l'équation obtenue en minimisant (27) par rapport à la métrique auxiliaire γ_{ab}). On peut les satisfaire en exprimant deux des composantes d'espace-temps des oscillateurs a_n^μ, \tilde{a}_n^μ (pour chaque n) en fonction des autres. De coup, les états physiques de la corde sont décrits par des oscillateurs a_n^i, \tilde{a}_n^i où l'indice i ne prend que $D - 2$ valeurs dans un espace-temps de dimension D . Oubliant pour le moment cette subtilité (qui est cependant physiquement cruciale), concluons cette discussion en résumant le "spectre" d'une corde quantique, c'est-à-dire l'ensemble des états quantiques de mouvement d'une corde.

Pour une corde ouverte, l'ensemble des états quantiques décrit les états de mouvement (impulsion p^μ) d'un ensemble infini de particules relativistes, ayant des masses carrées $M^2 = -\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ égales à $(N - 1) m_s^2$, où N est un nombre entier, et où $m_s \equiv \hbar/\ell_s$ est la masse fondamentale de la théorie des cordes associée à la longueur fondamentale ℓ_s . Pour une corde fermée, on trouve une autre "tour infinie" de particules de plus en plus massives, avec cette fois $M^2 = 4(N - 1) m_s^2$. Dans les deux cas l'entier N est donné, en fonction des amplitudes d'oscillations (se déplaçant à droite) de la corde, par

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n \eta_{\mu\nu} (a_n^\mu)^\dagger a_n^\nu. \quad (29)$$

Dans le cas d'une corde fermée on doit aussi satisfaire la contrainte $N = \tilde{N}$ où \tilde{N} est l'opérateur obtenu en remplaçant a_n^μ par \tilde{a}_n^μ dans (29).

Le résultat précédent dit essentiellement que l'énergie interne (quantifiée) d'oscillation d'une corde définit la masse carrée de la particule associée. La présence du terme additionnel -1 dans les formules données ci-dessus pour M^2 signifie que l'état quantique d'énergie interne minimale d'une corde, c'est-à-dire l'état de "vide" $|0\rangle$ où tous les oscillateurs sont dans leur état fondamental, $a_n^\mu |0\rangle = 0$, correspond à une masse carrée négative ($M^2 = -m_s^2$ pour la corde ouverte et $M^2 = -4m_s^2$ pour la corde fermée). Cet état quantique inhabituel (un "tachyon") correspond à une instabilité de la théorie des cordes bosoniques. Il est absent des versions plus sophistiquées des théories des cordes ("supercordes") dues à F. Gliozzi, J. Scherk et D. Olive, à M. Green et J.H. Schwarz, et à D. Gross et collaborateurs. Concentrons-nous sur les autres états (qui sont les seuls à avoir des correspondants dans les théories de supercordes). On trouve alors que le premier état quantique physique possible ($N = 1$, avec la contrainte $N = \tilde{N}$) décrit une particule de masse nulle. En théorie quantique relativiste on sait que toute particule est l'excitation d'un champ. Donc les parti-

cules de masse nulle qui apparaissent en théorie des cordes doivent correspondre à des champs à longue portée. Pour savoir quels sont les champs qui apparaissent ainsi il faut regarder de plus près quelles combinaisons possibles d'excitations des oscillateurs $a_1^\mu, a_2^\mu, a_3^\mu, \dots$, apparaissant dans la formule (29), peuvent aboutir à $N = 1$. A cause du facteur n multipliant dans (29) la contribution de l'harmonique d'ordre n à la masse carrée, seuls les oscillateurs du mode fondamental $n = 1$ peuvent donner $N = 1$. On en déduit que les états quantiques internes des particules de masse nulle apparaissant dans la théorie des *cordes ouvertes* sont décrits par un état d'oscillation de la corde du type

$$\zeta_\mu (a_1^\mu)^\dagger | 0 \rangle. \quad (30)$$

En revanche, à cause de la contrainte $N = \tilde{N} = 1$, les états quantiques internes des particules de masse nulle apparaissant dans la théorie des *cordes fermées* sont décrits par un état d'excitation contenant à la fois une oscillation allant à gauche, et une oscillation allant à droite :

$$\zeta_{\mu\nu} (a_1^\mu)^\dagger (\tilde{a}_1^\nu)^\dagger | 0 \rangle. \quad (31)$$

Dans les équations (30) et (31) l'état $|0\rangle$ désigne l'état fondamental de tous les oscillateurs ($a_n^\mu | 0 \rangle = \tilde{a}_n^\mu | 0 \rangle = 0$).

L'état (30) décrit donc une particule de masse nulle (impulsion satisfaisant $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$), possédant une "structure interne" décrite par une polarisation vectorielle ζ_μ . On reconnaît là exactement la description d'un photon, c'est-à-dire l'état quantique associé à une onde $A_\mu(x) = \zeta_\mu \exp(i k_\lambda x^\lambda)$, où $p^\mu = \hbar k^\mu$. La théorie des cordes ouvertes contient donc la théorie de Maxwell. [On démontre aussi que, à cause des contraintes mentionnées brièvement ci-dessus, la polarisation ζ_μ doit être transverse, $k^\mu \zeta_\mu = 0$, et qu'elle n'est définie qu'à une transformation de jauge près : $\zeta'_\mu = \zeta_\mu + a k_\mu$.] L'état (31), quant à lui, décrit une particule de masse nulle ($\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$), possédant une "structure interne" décrite par une polarisation tensorielle $\zeta_{\mu\nu}$. L'onde plane associée à une telle particule est donc de la forme $\tilde{h}_{\mu\nu}(x) = \zeta_{\mu\nu} \exp(i k_\lambda x^\lambda)$, où $p^\mu = \hbar k^\mu$. Comme pour le cas de la corde ouverte, on démontre que $\zeta_{\mu\nu}$ doit être transverse, $\zeta_{\mu\nu} k^\nu = 0$ et qu'il n'est défini qu'à une transformation de jauge près, $\zeta'_{\mu\nu} = \zeta_{\mu\nu} + k_\mu a_\nu + k_\nu b_\mu$. On voit apparaître ici le même genre de structure que pour les ondes planes en relativité générale. Mais on a ici une structure plus riche qu'en relativité générale. En effet, comme l'état (31) est obtenu en combinant deux états d'oscillations indépendants, $(a_1^\mu)^\dagger$ et $(\tilde{a}_1^\nu)^\dagger$, le tenseur de polarisation $\zeta_{\mu\nu}$ n'est pas contraint à être symétrique. De plus il n'est pas contraint à avoir une trace nulle. Alors, si l'on décompose $\zeta_{\mu\nu}$ dans ses parties irréductibles possibles (une partie symétrique et sans trace, une partie symétrique avec trace, et une partie antisymétrique) on trouve que le champ $\tilde{h}_{\mu\nu}(x)$ associé aux états à masse nulle d'une corde fermée se décompose : (i) en un champ $h_{\mu\nu}(x)$ ("graviton") représentant une onde gravitationnelle faible en relativité générale, (ii) un champ scalaire $\Phi(x)$ (appelé le "dilaton"), et (iii) un champ tensoriel antisymétrique $B_{\mu\nu}(x) = -B_{\nu\mu}(x)$ soumis à l'invariance de jauge $B'_{\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu a_\nu(x) - \partial_\nu a_\mu(x)$. De plus, quand on étudie les interactions non linéaires entre ces divers champs, telles qu'elles sont prédites par les amplitudes de transition $A(f, i)$ en théorie des cordes, on démontre que le champ $h_{\mu\nu}(x)$ représente vraiment une déformation de la géométrie plate de l'espace-temps de fond où l'on définit initialement la théorie. Insistons sur ce résultat remarquable. On est parti d'une théorie qui étudiait la dynamique quantique d'une corde dans un espace-temps rigide de fond. Cette théorie prédit que *certaines excitations quantiques d'une corde* (qui se propagent à la vitesse de la lumière) *représentent en fait des ondes de déformation de la géométrie de l'espace-temps*. En termes intuitifs, l'"élasticité" de l'espace-temps postulé par la théorie de la relativité générale apparaît ici comme dû à certaines vibrations internes d'un objet élastique étendu selon une dimension spatiale.

Une autre conséquence suggestive de la théorie des cordes est le lien suggéré par la comparaison entre (30) et (31). En gros, l'Eq. (31) dit que l'état interne d'une

corde fermée correspondant à un graviton est construit en faisant le produit (tensoriel) d'états correspondant à des photons dans la théorie des cordes ouvertes. Ce lien inattendu entre la gravitation einsteinienne ($g_{\mu\nu}$) et la théorie de Maxwell (A_μ) se traduit, quand on regarde les interactions en théories des cordes, par des identités remarquables (dues à H. Kawai, D.C. Lewellen et S.-H.H. Tye) entre les amplitudes de transition de cordes ouvertes et celles des cordes fermées. Cette affinité entre électromagnétisme, ou plutôt théorie de Yang-Mills, et gravitation a récemment donné lieu à de fascinantes conjectures (dues à A. Polyakov et J. Maldacena) reliant des théories quantiques de Yang-Mills en espace-temps plat à des limites quasi-classiques de la théorie des cordes et de la gravitation en espace-temps courbe. Einstein aurait certainement été intéressé de voir comment la relativité générale classique y est utilisée pour éclairer la limite d'une théorie *quantique* de Yang-Mills.

Ayant expliqué le point de départ de la théorie des cordes, nous pouvons indiquer pour quelle raison intuitive cette théorie évite les problèmes d'intégrales divergentes qui apparaissent quand on essayait de quantifier directement la gravitation. On a vu que la théorie des cordes contient une tour infinie de particules de masses croissant avec le degré d'excitation des oscillateurs internes de la corde. Le champ gravitationnel apparaît dans la limite où l'on considère les interactions à basse énergie ($E \ll m_s$) entre les états de masse nulle de la théorie. Dans cette limite le graviton (c'est à dire la particule associée au champ gravitationnel) est traité comme une particule "ponctuelle". Quand on considère des processus plus compliqués (à une boucle, $\ell = 1$, voir ci-dessus), il peut apparaître des gravitons virtuels élémentaires d'énergie arbitrairement élevée. Ce sont ces gravitons virtuels de haute énergie qui sont responsables des divergences. Mais, en théorie des cordes, quand on considère n'importe quel processus intermédiaire où apparaissent des énergies élevées, il faut se rappeler que cette énergie intermédiaire élevée peut aussi être utilisée pour exciter l'état interne des gravitons virtuels, et révéler ainsi le fait qu'ils sont "faits" d'une corde étendue. Une analyse de ce fait montre que la théorie des cordes introduit une troncation effective du type $E \lesssim m_s$ sur l'énergie des particules virtuelles échangées. En d'autres termes, le fait qu'il n'y ait pas de particules vraiment "ponctuelles" en théorie des cordes, mais seulement des excitations de cordes ayant une longueur caractéristique $\sim \ell_s$, élimine le problème des infinis liés à des échelles d'espace et de temps arbitrairement petites. Du coup on peut calculer en théorie des cordes les amplitudes de transition correspondant à la collision entre deux gravitons, et on trouve que le résultat est donné par une intégrale finie [25].

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le point de départ de la théorie des cordes. Cette théorie est complexe et elle est toujours en développement rapide. Indiquons brièvement quelques autres aspects de cette théorie qui sont pertinents pour notre exposé centré autour de la gravitation relativiste. Disons d'abord que les versions plus sophistiquées de la théorie des cordes ("supercordes") requièrent l'inclusion d'oscillateurs fermioniques b_n^μ, \tilde{b}_n^μ , en plus des oscillateurs bosoniques a_n^μ, \tilde{a}_n^μ introduits ci-dessus. On trouve alors qu'il n'y a pas de particules de masse carrée négative, et que la dimension D de l'espace-temps doit être égale à 10. On trouve aussi que les états de masse nulle contiennent plus d'états que ceux indiqués ci-dessus. En fait, on trouve que les champs correspondant à ces états décrivent les diverses théories possibles de la supergravité en $D = 10$. Récemment (travaux de J. Polchinski) on a aussi compris que la théorie des cordes contenait non seulement les états d'excitation de cordes (c'est-à-dire des objets étendus spatialement dans une direction), mais aussi les états d'excitation d'objets étendus spatialement dans p directions, où l'entier p peut prendre d'autres valeurs que 1. Par exemple, $p = 2$ correspond à une *membrane*. Il semble même (selon C. Hull et P. Townsend) que l'on doive considérer qu'il y a une sorte de "démocratie" entre plusieurs valeurs de p . Un objet étendu dans p directions spatiales s'appelle un " p -brane". En général, la masse des états quantiques de ces p -branes est très élevée, étant paramétriquement plus élevée que la masse

caractéristique m_s . Cependant, on a aussi pu considérer une limite où la masse de certaines p -branes tend vers zéro. Dans cette limite, les champs associés à ces p -branes deviennent à longue portée. Un résultat surprenant (E. Witten) est que, dans cette limite, la tour infinie des états de certaines p -branes (pour $p = 0$) correspond exactement à la tour infinie d'états qui apparaissent quand on considère la supergravité maximale en $D = 11$ dimensions, avec la onzième dimension (spatiale) compactifiée sur un cercle (c'est-à-dire avec une condition de périodicité sur x^{11}). Autrement dit, dans une certaine limite, une théorie des supercordes en $D = 10$, se transforme en une théorie qui vit en $D = 11$ dimensions ! Du coup, beaucoup d'experts de la théorie des cordes pensent que la vraie définition (encore à trouver) de la théorie des cordes doit partir d'une théorie (à définir) en 11 dimensions ("théorie M ").

On a vu dans la Section 8, qu'un point de contact entre la gravitation relativiste et la théorie quantique était le phénomène d'émission thermique des trous noirs découvert par S.W. Hawking. La théorie des cordes a apporté une lumière nouvelle sur ce phénomène, ainsi que sur le concept d'"entropie" d'un trou noir. La question essentielle que le calcul de S.W. Hawking laissait dans l'ombre est : quel est le sens physique de la quantité S définie par l'Eq. (19) ? Dans la théorie thermodynamique des corps usuels, l'entropie d'un système est interprétée, depuis Boltzmann, comme le logarithme (naturel) du nombre d'états microscopiques N ayant les mêmes caractéristiques macroscopiques (énergie, volume, ...) que l'état du système considéré : $S = \log N$. Bekenstein avait essayé d'estimer le nombre d'états microscopiques internes d'un trou noir défini macroscopiquement, et avait argumenté pour un résultat tel que $\log N$ soit de l'ordre de grandeur de $A/\hbar G$, mais ses arguments restaient indirects et ne permettaient pas d'attribuer un sens clair à ce comptage d'états microscopiques. Les travaux d'A. Sen, et A. Strominger et C. Vafa, ainsi que de C.G. Callan et J.M. Maldacena ont, pour la première fois, donné des exemples de trous noirs dont la description microscopique en théorie des cordes est suffisamment précise pour permettre d'en calculer (dans certaines limites) le nombre d'états quantiques internes, N . Il est alors très satisfaisant de trouver un résultat final pour N dont le logarithme est *précisément* égal à l'expression (19). Cependant, il reste des zones d'ombre dans la compréhension de la structure quantique des trous noirs. En particulier, les calculs de théorie des cordes permettant de donner un sens statistique précis à l'entropie (19) concernent des trous noirs très spéciaux (dits "extrémaux", c'est-à-dire qui ont la charge électrique maximale que peut supporter un trou noir pour garder un horizon régulier). Ces trous noirs ont une température de Hawking égale à zéro, et n'émettent donc pas de rayonnement thermique. Ils correspondent à des états *stables* dans la théorie quantique. On aimerait cependant comprendre aussi en détail la structure quantique interne des trous noirs *instables*, comme le trou noir de Schwarzschild (17), qui a une température non nulle, et qui donc perd petit à petit de la masse sous forme de rayonnement thermique. Quel est l'état final auquel conduit ce processus graduel d'"évaporation" d'un trou noir ? Est-ce qu'un état quantique pur initial rayonne toute sa masse initiale pour se transformer entièrement en rayonnement thermique incohérent ? Ou un trou noir de Schwarzschild se transforme-t-il, après avoir atteint une taille minimum, en quelque chose d'autre ? Les réponses à ces questions restent en grande partie ouvertes, même s'il a été argumenté qu'un trou noir de Schwarzschild se transforme en un état quantique très massif d'une corde quand son rayon devient de l'ordre de ℓ_s [26].

Nous avons vu plus haut que la théorie des cordes contient la relativité générale dans une certaine limite. En même temps, la théorie des cordes est (*stricto sensu*) infiniment plus riche que la gravitation einsteinienne, car le graviton n'est qu'une excitation quantique particulière d'une corde, parmi un nombre infini d'autres. Quelles déviations à la gravitation einsteinienne prédit la théorie des cordes ? Cette question reste ouverte aujourd'hui à cause de notre manque de compréhension du lien entre la théorie des cordes et la réalité observée dans notre environnement habituel (espace-

temps à 4 dimensions ; interactions électromagnétiques, faibles et fortes ; spectre observé de particules ; . . .). Nous nous contenterons d'indiquer quelques possibilités. [Voir la contribution d'I. Antoniadis pour la discussion d'autres possibilités.] D'abord, disons que si l'on considère des processus de collision entre gravitons d'énergie-impulsion k plus petite que, mais non négligeable par rapport à, la masse caractéristique des cordes m_s , les calculs d'amplitude de transition en théorie des cordes montrent qu'il faut modifier les équations d'Einstein habituelles (en l'absence de matière) $R_{\mu\nu} = 0$, en incluant des corrections d'ordre $(k/m_s)^2$. On trouve que ces équations d'Einstein modifiées ont la forme (pour la théorie des cordes bosonique)

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \ell_s^2 R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} + \dots = 0, \quad (32)$$

où

$$R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} \equiv \partial_{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu} \Gamma_{\nu\beta}^{\sigma} - \partial_{\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma}, \quad (33)$$

désigne le "tenseur de courbure" de la métrique $g_{\mu\nu}$. [La quantité $R_{\mu\nu}$, définie dans la Section 5 et entrant de façon essentielle dans les équations d'Einstein, est une "trace" de ce tenseur : $R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma}$.] Comme il est indiqué par les points de suspension dans (32), les termes écrits ne sont que les deux premiers termes d'une série infinie en puissances croissantes de $\ell_s^2 \equiv \alpha'$. L'Eq. (32) montre comment le fait que la corde ne soit pas un point, mais soit étendue sur une longueur caractéristique $\sim \ell_s$, modifie la description einsteinienne de la gravitation. Les corrections à l'équation d'Einstein indiquées dans (32) sont, cependant, tout à fait négligeables dans la plupart des applications de la relativité générale. En effet, on s'attend à ce que ℓ_s soit de l'ordre de la longueur de Planck ℓ_p , Eq. (25). Plus précisément, on s'attend à ce que ℓ_s soit de l'ordre de grandeur de 10^{-32} cm. [Cependant, cette question reste ouverte, et il a été suggéré récemment que ℓ_s soit beaucoup plus grand, et peut être de l'ordre de 10^{-17} cm.]

Si l'on suppose que ℓ_s est de l'ordre de grandeur de 10^{-32} cm (et que les dimensions supplémentaires sont compactifiées sur des distances de l'ordre de ℓ_s), le seul domaine d'application de la relativité générale où les modifications indiquées dans (32) devraient jouer un rôle important est la cosmologie primordiale. En effet, près de la singularité initiale du Big Bang (si elle existe), la "courbure" $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ devient très grande. Quand elle atteint des valeurs comparables à ℓ_s^{-2} la série infinie de corrections dans (32) commence à jouer un rôle comparable au premier terme, découvert par Einstein. Une telle situation se trouve aussi à l'intérieur d'un trou noir, quand on s'approche beaucoup de la singularité (voir Fig. 3). Malheureusement, dans de telles situations, il faudrait pouvoir tenir compte de la série infinie de termes dans (32), c'est-à-dire remplacer la description einsteinienne de la gravitation par un *champ* (qui correspond à une particule (quantique) *ponctuelle*) par sa description cordiste exacte. C'est un problème difficile que l'on ne sait pas vraiment attaquer aujourd'hui.

Mais la théorie des cordes prédit, *a priori*, des modifications à basse énergie ($k \ll m_s$) plus drastiques de la relativité générale que les corrections indiquées dans (32). En effet, on a vu dans l'Eq. (31) ci-dessus, que la gravitation einsteinienne $g_{\mu\nu}(x)$ n'apparaissait pas seule en théorie des cordes. Elle est toujours nécessairement accompagnée par d'autres champs à longue portée, notamment un champ scalaire $\Phi(x)$, le "dilaton", et un tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}(x)$. Quels rôles ces "partenaires" du graviton jouent-ils dans la réalité observable ? Cette question n'a pas de réponse claire aujourd'hui. En outre, si l'on se souvient que la théorie des (super) cordes doit vivre dans un espace-temps de dimension $D = 10$, et qu'elle contient la théorie de la supergravité en $D = 10$ (et éventuellement $D = 11$), il y a beaucoup d'autres champs supplémentaires qui s'ajoutent aux dix composantes du tenseur métrique habituel $g_{\mu\nu}$ (en $D = 4$). Il est concevable que tous ces champs supplémentaires (qui ont une masse nulle en première approximation de la théorie des cordes) acquièrent des masses assez grandes dans notre univers local pour ne plus propager d'effets observables sur des

portées macroscopiques. Il reste cependant possible qu'un, ou plusieurs, de ces champs restent de masse (essentiellement) nulle, et puisse alors propager des effets physiques sur des portées assez grandes pour être observables. Il est donc intéressant de comprendre quels sont les effets physiques impliqués, par exemple, par le dilaton $\Phi(x)$, ou par $B_{\mu\nu}(x)$. Concernant ce dernier, il est intéressant de noter (comme l'ont souligné A. Connes, M. Douglas et A. Schwartz) que, dans un certaine limite, la présence d'un fond $B_{\mu\nu}(x)$ a l'effet de déformer de façon "non commutative" la géométrie de l'espace-temps. Cela veut dire que, en un certain sens, les coordonnées x^μ de l'espace-temps cessent d'être de simples nombres réels (commutants) pour devenir des quantités non-commutantes : $x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu}$ où $\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$ est lié à un $B_{\mu\nu}$ (uniforme) de fond. Considérons pour finir, l'autre partenaire obligé du graviton $g_{\mu\nu}(x)$, le dilaton $\Phi(x)$. Ce champ joue un rôle central en théorie des cordes. En effet, la valeur moyenne (dans le vide) du dilaton détermine la constante de couplage de la théorie des cordes, $g_s = e^\Phi$. A son tour, la valeur de g_s détermine (avec d'autres champs) les constantes de couplage de la physique. Par exemple, la constante de couplage de la gravitation est donnée par une formule du type $\hbar G = \ell_s^2 (g_s^2 + \dots)$ où les points de suspension désignent des termes correctifs (qui peuvent devenir très importants si g_s n'est pas très petit). De même, la constante de structure fine, $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$, qui détermine l'intensité des interactions électromagnétiques est une fonction de g_s^2 . A cause de ces relations entre les constantes de couplages de la physique et g_s (et donc la valeur du dilaton ; $g_s = e^\Phi$), on voit que si le dilaton est à masse nulle (c'est-à-dire à longue portée), sa valeur $\Phi(x)$ en un point x de l'espace-temps va dépendre de la distribution de matière dans l'univers. Par exemple, comme c'est le cas pour le champ gravitationnel (confer $g_{00}(x) \simeq -1 + 2GM/c^2 r$), on s'attendrait à ce que la valeur de $\Phi(x)$ dépende des masses présentes autour du point x , et soit différente à la surface de la Terre et à une altitude élevée. On pourrait aussi s'attendre à ce que $\Phi(x)$ soit sensible à l'expansion de l'univers et varie sur une échelle de temps comparable à l'âge de l'univers. Mais si $\Phi(x)$ varie dans l'espace et/ou dans le temps, on conclut des relations évoquées ci-dessus entre $g_s = e^\Phi$ et les constantes de couplage de la physique que celles-ci devraient aussi varier dans l'espace et/ou dans le temps. Donc, par exemple, la valeur de la constante de structure fine α pourrait être légèrement différente de sa valeur actuelle dans une galaxie très lointaine (et donc observée à un instant très reculé). De tels effets sont accessibles à des observations astronomiques fines et, d'ailleurs, certaines observations récentes ont suggéré que les constantes d'interaction sont différentes dans des galaxies lointaines. Cependant, d'autres données expérimentales (réacteur nucléaire fossile d'Oklo, composition isotopique de météorites terrestres anciens) mettent des limites très sévères sur une variabilité éventuelle des "constantes" de couplage. Indiquons enfin que si la "constante" de structure fine α , et d'autres "constantes" de couplage, varient avec un champ sans masse comme le dilaton $\Phi(x)$, alors ceci implique une violation du postulat de base de la relativité générale : le principe d'équivalence. En particulier, on démontre que l'universalité de la chute libre est nécessairement violée, c'est-à-dire que des corps de composition nucléaire différente doivent tomber, dans un champ gravitationnel extérieur, avec des accélérations différentes. Ceci donne une importante motivation pour tester le principe d'équivalence avec une précision accrue. Par exemple, la mission spatiale MICROSCOPE [27] (du CNES) devrait bientôt tester l'universalité de la chute libre au niveau 10^{-15} , et le projet spatial STEP (Satellite Test of the Equivalence Principle) [28] pourrait atteindre le niveau 10^{-18} .

Une autre possibilité phénoménologiquement intéressante est que le dilaton (et/ou d'autres champs scalaires du même type, appelés "modules") acquière une masse non nulle, mais très petite par rapport à l'échelle de masse des cordes m_s . On pourrait alors observer une modification de la gravitation newtonienne sur de petites distances (inférieures au dixième de millimètre). Pour une discussion de cette possibilité théorique et de ses tests expérimentaux récents voir, respectivement, les

contributions d’I. Antoniadis et de J. Mester à ce séminaire Poincaré.

12 Conclusion

Pendant longtemps la relativité générale était admirée comme une merveilleuse construction intellectuelle, mais elle ne jouait qu’un rôle marginal en physique. Typique de l’appréciation de cette théorie est la phrase de Max Born [29] prononcée lors du cinquantième anniversaire de l’*annus mirabilis* : “Les fondations de la relativité générale m’apparaisaient alors, et encore aujourd’hui, comme le plus grand exploit de la pensée humaine quant à la Nature, la plus stupéfiante association de pénétration philosophique, d’intuition physique et d’habileté mathématique. Mais ses liens à l’expérience étaient ténus. Cela me séduisait comme une grande œuvre d’art que l’on doit apprécier et admirer à distance.”

Aujourd’hui, un siècle après l’*annus mirabilis*, la situation est très différente. La relativité générale joue un rôle central dans un large domaine de la physique, allant de la cosmologie primordiale à la physique des trous noirs, en passant par l’observation des pulsars binaires et la définition du temps atomique international. Elle a même des applications pratiques quotidiennes, via les systèmes de positionnement par satellite (comme G.P.S., et bientôt son homologue européen Galileo). Beaucoup de projets expérimentaux ambitieux (et coûteux) visent à la tester (G.P.B., MICROSCOPE, STEP, ...), ou l’utilisent comme outil pour déchiffrer l’univers lointain (LIGO/VIRGO/GEO, LISA, ...). Loin est donc le temps où ses liens à l’expérience étaient ténus. Cependant, il est remarquable de constater que la fascination, évoquée par Born, pour la structure et les implications physiques de la théorie reste entière. L’une des motivations pour penser que la théorie des cordes (et d’autres objets étendus) contient la clef du problème de l’unification de la physique est son affinité profonde avec la relativité générale. En effet, alors que les essais de “Grande Unification” des années soixante-dix laissaient complètement de côté l’interaction gravitationnelle, la théorie des cordes conduit nécessairement au concept einsteinien fondamental d’un espace-temps dynamique. Il semble d’ailleurs qu’il faudra comprendre plus profondément l’espèce de “géométrie généralisée quantique” engendrée par l’interaction de cordes et de p -branes pour pouvoir formuler complètement cette théorie, et comprendre ses symétries cachées et ses implications physiques. Einstein apprécierait sans doute de voir le rôle central joué par les principes de symétrie au sein de la physique moderne.

Références

- [1] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, *Annalen der Physik* **17**, 891 (1905).
- [2] Le lecteur français aura accès aux articles principaux d’Einstein dans *Albert Einstein, Œuvres choisies*, Paris, Le Seuil/CNRS, 1993, sous la direction de F. Balibar. Voir notamment les tomes 2 (Relativités I) et 3 (Relativités II). On conseille aussi de consulter le séminaire Poincaré 2005 consacré à Einstein (<http://www.lpthe.jussieu.fr/poincare>) : *Einstein, 1905-2005, Poincaré Seminar 2005*, edited by T. Damour, O. Darrigol, B. Duplantier and V. Rivasseau (Birkhäuser Verlag, Basel, Suisse, 2006). Voir aussi l’excellent article de synthèse de D. Giulini et N. Straumann, “Einstein’s impact on the physics of the twentieth century”, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **37**, 115-173 (2006). Pour un accès en ligne de beaucoup d’articles originaux d’Einstein, et de documents sur lui, voir <http://www.alberteinstein.info/>. Notons aussi que l’essentiel des travaux en cours sur la relativité générale peut être consulté sur les diverses archives de <http://xxx.lanl.gov>, notamment l’archive gr-qc. Des

articles de revues sur certains sous-domaines de la relativité générale sont accessibles sur <http://relativity.livingreviews.org>.

- [3] Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, édité par Maurice Clavelin, Armand Colin, Paris, 1970.
- [4] Le lecteur intéressé à connaître les tests expérimentaux récents des théories de la gravitation pourra consulter sur internet, soit la revue très détaillée de C.M. Will dans Living Reviews (<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2001-4>), soit la revue brève de T. Damour dans la Review of Particle Physics (<http://pdg.lbl.gov/>). Voir aussi la contribution de John Mester à ce séminaire Poincaré.
- [5] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, 1915, p. 844.
- [6] Le lecteur désirant étudier en détail le formalisme de la théorie de la relativité générale, et ses applications, pourra consulter, par exemple, les ouvrages suivants : L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs*, Mir, Moscou, 1989 ; S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972 ; H.C. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, Second Edition, Norton, New York, 1994 ; N. Straumann, *General Relativity, With Applications to Astrophysics*, Springer Verlag, 2004. Signalons aussi les notes de cours détaillées, sur la relativité générale, de S.M. Carroll, disponibles sur internet : <http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/> ; ou bien sur gr-qc/9712019. Enfin, signalons le livre récent (en français) sur l'histoire de la découverte et de la réception de la relativité générale : J. Eisenstaedt, *Einstein et la relativité générale*, CNRS, Paris, 2002.
- [7] B. Bertotti, L. Iess et P. Tortora, *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, *Nature* **425**, 374 (2003).
- [8] <http://einstein.stanford.edu>
- [9] W. Israel, *Dark stars : the evolution of an idea*, in *300 Years of Gravitation*, édité par S.W. Hawking et W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, chapitre 7, pp. 199-276.
- [10] La découverte des pulsars binaires est relatée dans la conférence Nobel de Hulse : R.A. Hulse, *Review of Modern Physics* **66**, 699 (1994).
- [11] Pour une introduction aux caractéristiques observationnelles des pulsars, et à leur utilisation pour tester la gravitation relativiste, voir la conférence Nobel de Taylor : J.H. Taylor, *Review of Modern Physics* **66**, 711 (1994). Voir aussi la contribution de Michael Kramer à ce séminaire Poincaré.
- [12] Pour une mise à jour des caractéristiques observationnelles des pulsars, et de leur utilisation pour tester la relativité générale, voir la Living Review d'I.H. Stairs, disponible sur <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-5/> et la contribution de Michael Kramer à ce séminaire Poincaré.
- [13] Pour une mise à jour récente des tests de la gravitation relativiste (et des théories tenseur-scalaires) obtenus par chronométrage de pulsars binaires, voir G. Esposito-Farèse, gr-qc/0402007 (disponible sur l'archive general relativity and quantum cosmology à l'adresse <http://xxx.lanl.gov>), et T. Damour et G. Esposito-Farèse, en préparation. La Fig. 4 est inspirée de ces références.
- [14] Pour une revue du problème du mouvement de deux corps gravitationnellement condensés en relativité générale, jusqu'au niveau où apparaissent les effets liés à la propagation à vitesse finie de l'interaction gravitationnelle, voir T. Damour, *The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity*, in *300 Years of Gravitation*, édité par S.W. Hawking et W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, chapitre 6, pp. 128-198.

- [15] A. Einstein, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, 1916, p. 688; *ibidem*, *Über Gravitationswellen*, 1918, p. 154.
- [16] Pour une introduction très détaillée à ces trois problèmes, voir K.S. Thorne *Gravitational radiation*, in *300 Years of Gravitation*, édité par S.W. Hawking et W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, chapitre 9, pp. 330-458.
- [17] <http://www.ligo.caltech.edu/>
- [18] <http://www.virgo.infn.it/>
- [19] <http://www/geo600.uni-hanover.de/>
- [20] <http://lisa.jpl.nasa.gov/>
- [21] L. Blanchet et al., gr-qc/0406012; voir aussi la Living Review de L. Blanchet, disponible sur <http://relativity.livingreviews.org/Articles>.
- [22] La Fig. 5 est inspirée d'un travail d'A. Buonanno et T. Damour : gr-qc/0001013.
- [23] F. Pretorius, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 121101 (2005), gr-qc/0507014; J. BAKER ET AL., *Phys. Rev. D* **73**, 104002 (2006), gr-qc/0602026.
- [24] Pour un exposé particulièrement clair du développement de la théorie quantique des champs, voir (entre autres) le premier chapitre de S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, volume 1, Foundations, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [25] Pour une introduction à la théorie des (super)cordes voir <http://superstringtheory.com/>. Pour une introduction détaillée (et technique) à la théorie voir les livres : B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004; M.B. Green, J.H. Schwarz et E. Witten, *Superstring theory*, 2 volumes, Cambridge University Press, Cambridge, 1987; et J. Polchinski, *String Theory*, 2 volumes, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Pour lire des articles de revue ou de recherche sur cette théorie en plein développement voir l'archive hep-th sur <http://xxx.lanl.gov>. Pour rechercher des informations sur la littérature en théorie des cordes (et plus généralement en physique des hautes énergies) voir aussi le site <http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep>.
- [26] Pour une introduction détaillée à la physique des trous noirs voir P.K. Townsend, gr-qc/9707012; pour une entrée dans la vaste littérature sur l'entropie des trous noirs, voir, par exemple, T. Damour, hep-th/0401160 in *Poincaré Seminar 2003*, édité par Jean Dalibard, Bertrand Duplantier et Vincent Rivasseau (Birkhäuser Verlag, Basel, 2004), pp. 227-264.
- [27] <http://www.onera.fr/microscope/>
- [28] <http://www.sstd.rl.ac.uk/fundphys/step/>.
- [29] M. Born, *Physics and Relativity*, in *Fünfzig Jahre Relativitätstheorie, Bern, 11-16 Juli 1955, Verhandlungen*, édité par A. Mercier et M. Kervaire, Helvetica Physica Acta, Supplement **4**, 244-260 (1956).